Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.О. Иванова

ОГЭ

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ОГЭ-2016

РЕШЕНИЯ
С МЕТОДИЧЕСКИМИ
РЕКОМЕНДАЦИЯМИ

ПО НОВОЙ 2016 ДЕМОВЕРСИИ

9 КЛАСС

40 ТРЕНИРОВОЧНЫХ ВАРИАНТОВ

ЛЕГИОН ™

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ОГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

Решения с методическими рекомендациями

9-й класс

ПОДГОТОВКА К ОГЭ-2016

40 тренировочных вариантов

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2015

ББК 22.14
М 34

Рецензенты: *С. В. Дерезин* — кандидат физико-математических наук,
А. П. Уваровский — кандидат педагогических наук,
заслуженный учитель России

Авторский коллектив:
Войта Е. А., Дрёмов В. А., Иванов С. О., Ковалевская А. С., Коннова Е. Г., Кривенко В. М., Нужа Г. Л., Ольховая Л. С., Резникова Н. М., Фридман Е. М., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. Решения с методическими рекомендациями. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год** : учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. О. Иванова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 368 с. — (ОГЭ).

ISBN 978-5-9966-0803-4

Данное пособие содержит **решения всех тестовых заданий повышенного и высокого уровней сложности**, всех задач из раздела «Задачник», а также **методические рекомендации** по решению заданий ОГЭ повышенного и высокого уровней сложности книги «Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год».

Обращаем ваше внимание, что условий заданий в данном пособии нет, они содержатся в основной книге.

Используя эти два пособия, девятиклассники смогут отработать навыки выполнения заданий предстоящего экзамена и систематизировать знания в процессе подготовки к ОГЭ, а учителя — обеспечить качественную подготовку обучающихся к предстоящему экзамену.

Обсудить издание, оставить отзыв можно на форумах издательства `http://f.legionr.ru`, `http://legion-posobiya.livejournal.com`.

ББК 22.14

ISBN 978-5-9966-0803-4

Оглавление

2. Зак. № 71

Методические рекомендации по выполнению заданий ОГЭ с развёрнутым ответом

В ранее вышедшей книге «Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год» приведено решение второй части (где даны задания с развёрнутым ответом) каждого четвёртого варианта. В настоящем пособии представлены решения заданий части 2 остальных вариантов, а также решения всех заданий из сборника задач (глава II). Обращаем ваше внимание, что условий заданий в данном пособии нет, они содержатся в указанной выше основной книге.

При работе с данным пособием следует учитывать, что решения в нём описаны более подробно, чем требуется от учащегося, выполняющего экзаменационную работу. Таким образом, они не являются образцом записи решений предлагаемых тренировочных вариантов, а служат для обучения (в том числе самообучения) методам решения типовых экзаменационных заданий. Например, при выполнении заданий экзаменационной работы из блока «Алгебра» многие рассуждения можно излагать устно, записав лишь основные выкладки. При выполнении заданий из блока «Геометрия» от учащегося не требуется записывать формулировки общеизвестных теорем (типа теоремы Пифагора), а достаточно правильно выстроить цепочку рассуждений и привести ссылки на эти теоремы.

Задания тренировочных тестов мы будем разбивать на типы и для каждого типа давать рекомендации по выполнению или последовательность шагов, приводящих к правильному решению.

§ 1. Модуль «Алгебра», задание 21

В задании предлагается при помощи преобразования выражений сократить дробь, решить уравнение (систему уравнений) или неравенство (систему неравенств).

Рассмотрим по порядку методы решения указанных типов заданий.

Типы заданий	Номера вариантов
Сокращение дроби, содержащей степени или корни	5*, 6, 7, 8, 25*, 26, 27, 28, 29*, 30, 35, 36
Решение уравнения при помощи разложения на множители	1*, 2, 3, 4, 9*, 10, 11, 12, 21*, 22, 23, 24, 39, 40
Решение уравнения, сводящегося к квадратному при помощи замены переменной	17*, 18, 19, 20, 33*, 34
Решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными	31, 32
Решение неравенства или системы неравенств с одной неизвестной	13*, 14, 15, 16, 37*, 38

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Задание 21: сокращение дроби, содержащей степени или корни

Материал для повторения: алгебраические дроби, степень с целым показателем, запись корней с помощью степени с дробным показателем.

Задания на сокращение дробей можно разделить на несколько элементарных задач, при решении которых используются свойства степени.

1. Если в числителе или знаменателе дроби присутствует сумма некоторых степеней с одинаковыми основаниями, то её нужно преобразовать в произведение. Для этого необходимо определить степень с наименьшим показателем и вынести её за скобку. Например, в варианте № 6 выражение $5^{n-1} + 5^{n+2}$ после вынесения за скобки общего множителя 5^{n-1} преобразуется к виду $5^{n-1} \cdot 126$.

2. При необходимости нужно разложить все числа, стоящие в основании степеней, на простые множители. Затем воспользоваться свойствами степени $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ и $(a^n)^k = a^{nk}$. Например, в варианте № 27 требуется сократить дробь $\frac{12^{n-5}}{3^{n-6} \cdot 2^{2n-9}}$. Для этого выражение в числителе 12^{n-5} сначала приводим к виду $(3 \cdot 2^2)^{n-5}$ (раскладывая число 12 на простые множители), затем к виду $3^{n-5} \cdot (2^2)^{n-5}$ и, наконец, к виду $3^{n-5} \cdot 2^{2n-10}$.

3. Следует свести дробь к произведению степеней различных чисел. Воспользуемся свойствами $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ и $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$. Например, в уже рассмотренном задании варианта 27 преобразования могут быть произведены следующим образом:

$$\frac{3^{n-5} \cdot 2^{2n-10}}{3^{n-6} \cdot 2^{2n-9}} = 3^{(n-5)-(n-6)} \cdot 2^{(2n-10)-(2n-9)} = 3 \cdot 2^{-1}.$$

4. После произведённых преобразований остаётся вычислить значение выражения, полученного на предыдущем этапе.

Замечание. В решении, которое должен записать экзаменуемый, не обязательно наглядно представлять выполнение всех пунктов указанного алгоритма. Достаточно продемонстрировать цепочку верных преобразований, приводящих к правильному ответу. Также в решениях, описанных в данной книге, зачастую пропускаются некоторые очевидные промежуточные рассуждения.

Задание 21: решение уравнения при помощи разложения на множители

Материал для повторения: многочлены, преобразования многочленов, линейные и квадратные уравнения.

В этом задании предлагается решить уравнение 3-й или 4-й степени. Формулы решения таких уравнений общего вида существуют, но в школе обычно не изучаются. Тем не менее в конкретных примерах они не требуются, так как имеется возможность свести исходное уравнение к квадратному (или линейному) методом разложения на множители.

В случае когда уравнение представляет собой равенство произведений линейных множителей и квадратных трёхчленов, целесообразно использовать метод вынесения общего множителя.

1. Следует разложить все имеющиеся квадратные трёхчлены на линейные множители. Например, в варианте №11 дано уравнение $x(x^2 - x - 6) = 15(x - 3)$. Разложим на множители квадратный трёхчлен $x^2 - x - 6$. Корнями являются числа -2 и 3, поэтому рассматриваемый трёхчлен можно записать в виде $(x + 2)(x - 3)$, а исходное уравнение принимает вид $x(x + 2)(x - 3) = 15(x - 3)$.

2. Нужно перенести все выражения в левую часть уравнения, а затем вынести общий множитель за скобку. В рассмотренном примере общим множителем является $(x - 3)$. В скобках останется выражение, после упрощения приводимое к квадратному трёхчлену:
$(x - 3)\big(x(x + 2) - 15\big) = 0,$
$(x - 3)(x^2 + 2x - 15) = 0.$

3. Нужно найти корни каждого из множителей в левой части уравнения, полученного на предыдущем шаге. Все найденные значения записать в ответ.

В случае когда уравнение дано в виде равенства нулю многочлена (либо может быть сведено к такому виду), решать предполагается следующим образом.

1. Максимально упростить имеющееся уравнение. Например, в варианте № 2 дано уравнение $x^4 + x^2 - 2x = 0$. Его можно упростить выносом общего множителя x за скобки: $x(x^3 + x - 2) = 0$.

2. Для решения полученного приведённого уравнения 3-й или 4-й степени нужно подставить вместо неизвестной делители свободного члена. Например, рассмотрим многочлен $x^3 + x - 2$. Делителями его свободного члена являются числа ± 1 и ± 2. Подстановкой в многочлен находим, что число 1 является его корнем.

3. Соответствующий найденному корню множитель следует вынести за скобку. В рассмотренном примере число 1 является корнем многочлена $x^3 + x - 2$, поэтому можно вынести линейный множитель $x - 1$. Уравнение примет вид $x(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$. Вынесение линейного множителя можно производить разными способами, но наиболее универсальным является *деление в столбик* (пример показан в решении варианта № 3).

4. Теперь, когда левая часть исходного уравнения разложена на множители, нужно найти корни каждого из множителей. Все найденные значения следует записать в ответ.

Задание 21: решение уравнения, сводящегося к квадратному при помощи замены переменной

Материал для повторения: действия с дробями, линейные и квадратные уравнения.

Учащийся может сразу увидеть необходимость замены, которая сведёт исходное уравнение к квадратному. Тогда решение сводится к следующим шагам.

1. Произвести замену переменной. В зависимости от задания может быть заменён некоторый многочлен либо рациональное выражение. Например, в уравнении $\frac{7}{x-2} - \frac{5}{(x-2)^2} - 2 = 0$ из варианта № 20 целесообразно произвести замену $\frac{1}{x-2} = t$.

2. Решить полученное квадратное уравнение (относительно новой переменной t).

3. Произвести обратную замену переменной: для каждого корня, найденного на предыдущем шаге, решить соответствующее уравнение. Например, для задания варианта № 20 такими уравнениями будут $\frac{1}{x-2} = \frac{2}{5}$ и $\frac{1}{x-2} = 1$. Найденные корни следует записать в ответ.

Задание 21: решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными

Материал для повторения: линейные уравнения, системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

В данном типе заданий предлагается решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. В решениях, приведённых в данном пособии (варианты 31 и 32), проиллюстрирован метод сложения уравнений. Однако учащийся может воспользоваться методом подстановки для решения тех же самых систем.

Задание 21: решение неравенства или системы неравенств с одной неизвестной

Материал для повторения: неравенства с одной переменной, метод интервалов, системы неравенств с одной переменной.

Предлагаемые неравенства и системы неравенств решаются при помощи метода интервалов.

1. Во всех неравенствах нужно перенести выражения в левую часть, а затем разложить на множители. Например, в варианте № 38 исходное неравенство $(4x^2 + 3x)(-2 - x^2) \geqslant 7(-2 - x^2)$ сводится к виду $(4x^2 + 3x - 7)(-2 - x^2) \geqslant 0$ (или $4x^2 + 3x - 7 \leqslant 0$, если заметить, что выражение $-2 - x^2$ отрицательно при любых значениях x). Затем трёхчлен $4x^2 + 3x - 7$ нужно разложить на линейные множители.

2. Каждое из преобразованных неравенств нужно решить методом интервалов.

3. Если неравенств несколько, то необходимо при помощи координатной прямой найти пересечение найденных решений этих неравенств (как это, например, сделано в варианте № 16).

§ 2. Модуль «Алгебра», задание 22

В задании предлагается решить текстовую задачу на доли, проценты, движение или совместную работу.

Рассмотрим по порядку методы решения указанных типов заданий.

Типы заданий	Номера вариантов
Доли или проценты	9*, 10, 11, 12, 17*, 18, 19, 20
Процентные доли веществ в смеси	13*, 14, 15, 16, 39, 40
Подсчёт средней скорости	1*, 2, 3, 4
Движение по дороге	33*, 34, 37*
Встречное движение по дороге	21*, 22, 38
Движение с опережением по дороге	5*, 6, 7, 8, 23, 24, 25*, 26, 35, 36
Движение по реке	29*, 30, 31, 32
Совместная работа	27, 28

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Задание 22: доли или проценты

Материал для повторения: отношения, проценты, пропорции, действия с дробями, линейные уравнения.

Задания на подсчёт долей целого либо пропорций между долями. Обычно решение сводится к построению математической модели (в данном случае моделью является линейное уравнение) с последующим нахождением корней.

Подобные задания решаются следующим образом.

1. Необходимо определить объекты, между которыми установлены соотношения. Например, рассмотрим задание варианта 11: «Велосипедист проехал некоторое расстояние от одного города до другого за три дня. В первый день он проехал 30% от расстояния, которое он проехал за третий день. Расстояние, которое он проехал в третий день, составило 65% от расстояния, которое он проехал во второй день. Во второй день он проехал на 56 км больше, чем в третий день. Сколько километров проехал велосипедист за три дня?»

Здесь соотношения установлены между тремя объектами — расстояниями, преодолёнными за 1-й, 2-й и 3-й дни.

2. Далее вводится неизвестная величина. Обычно такой величиной становится один из объектов, установленных в предыдущем пункте. В рассмотренном примере удобно за x обозначить расстояние, пройденное за второй день.

3. Все рассматриваемые объекты должны быть выражены через эту неизвестную величину. В нашем примере в третий день пройдено 65% от расстояния за второй день, значит, расстояние за третий день равно $0{,}65x$. В первый день пройдено 30% от расстояния за третий день, значит, расстояние за первый день равно $0{,}3 \cdot 0{,}65x = 0{,}195x$.

4. В условии задачи обязательно присутствует фраза, устанавливающая связь между рассмотренными объектами. Используя эту фразу, нужно составить уравнение и решить его. В рассматриваемом примере такой фразой является «Во второй день он проехал на 56 км больше, чем в третий день». Следовательно, уравнение будет $x - 0{,}65x = 56$, откуда $x = 160$.

5. Нужно вспомнить искомую величину и вычислить её. В рассматриваемом примере искомая величина — сумма расстояний за все три дня. Для её нахождения можно отдельно найти расстояния за каждый из дней, а затем просуммировать их.

Замечание. В разных задачах может идти речь о соотношениях между различными объектами: расстояния, денежные средства, число предметов или людей, произведённая продукция и т.д.

Задание 22: процентные доли веществ в смеси

Материал для повторения: отношения, проценты, пропорции, действия с дробями, линейные уравнения.

Задачи о смеси, состоящей из двух веществ, допускающие арифметическое решение. Решение основывается на том, что масса одного вещества постоянна, а масса другого меняется (вода добавляется или испаряется). Решение подобных заданий рассмотрим на примере из варианта 15: «Сразу после сбора урожая процентное содержание воды в бананах составляет 75%. После их перевозки процентное содержание воды в них становится равным 70%. Сколько килограммов бананов надо приобрести, чтобы после перевозки осталось 2500 кг бананов?»

1. В задании описаны две разные смеси из одних и тех же веществ. В данном случае этими смесями являются бананы до и после перевозки, а веществами — вода и сухое вещество. Сначала нужно найти массы веществ в той смеси, для которой в условии даны необходимые величины. В рассмотренном примере можно найти массу сухого вещества в бананах после перевозки. Процентная доля сухого вещества $100\% - 70\% = 30\%$, масса $2500 \cdot \dfrac{30}{100} = 750$ (кг).

2. Теперь можно найти массы веществ в смеси, о которой был задан вопрос в условии задачи. Применительно к примеру из варианта 15 используем тот факт, что при испарении воды масса сухого вещества не изменяется. Следовательно, до перевозки в бананах содержалось также 750 кг сухого вещества. Используем данные о том, что до перевозки в

бананах было 75% воды, значит, 25% сухого вещества. Масса первоначальной смеси (бананов до перевозки) составляет $750 \cdot \frac{100}{25} = 3000$ (кг).

Задание 22: подсчёт средней скорости

Материал для повторения: отношения, формула средней скорости.

В данном задании речь идёт о транспортном средстве, двигавшемся на разных участках дороги с разной скоростью. Поиск средней скорости рассмотрим на примере из варианта 4: «Первые 70 км автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие 100 км — со скоростью 50 км/ч, а последние 130 км — со скоростью 65 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути».

1. Необходимо, применяя формулу $s = vt$, найти длину и затраченное время на каждом интервале. В нашем примере:

1-й интервал — $s = 70$ км, $t = \frac{70}{70} = 1$ (ч);

2-й интервал — $s = 100$ км, $t = \frac{100}{50} = 2$ (ч);

3-й интервал — $s = 130$ км, $t = \frac{130}{65} = 2$ (ч).

2. Нужно найти суммарное время и суммарный путь, просуммировав соответствующие значения на интервалах. В нашем случае суммарное время равно 5 ч, суммарный путь равен 370 км.

3. Применяя определение средней скорости, получаем ответ, разделив суммарное расстояние на суммарное время. В нашем случае это будет $\frac{300}{5} = 60$ (км/ч).

Замечание. Распространённая ошибка при решении данного задания заключается в том, что учащиеся, вопреки определению средней скорости, подсчитывают её как среднее арифметическое скоростей на отдельных интервалах (приходя к неверному ответу).

Задание 22: движение по дороге

Материал для повторения: линейные уравнения, квадратные уравнения, формула средней скорости.

Разные задания на движение по дороге одного или нескольких транспортных средств. Решение обычно сводится к построению математической модели (линейного или квадратного уравнения) и последующего его решения. После получения корней уравнения следует учитывать, что скорость, время и расстояние являются положительными величинами.

Задание 22: встречное движении по дороге

Материал для повторения: линейные уравнения, квадратные уравнения, формула средней скорости, скорость сближения при движении навстречу.

Разные задания на движение по дороге нескольких (обычно двух) транспортных средств. При решении следует вспомнить, что транспортные средства, имеющие собственные скорости v_1 и v_2, при движении навстречу сближаются со скоростью $v_1 + v_2$. С учётом сказанного следует построить математическую модель (линейное или квадратное уравнение) и найти корни уравнения. После получения корней уравнения следует учитывать, что скорость, время и расстояние являются положительными величинами.

Задание 22: движение с опережением по дороге

Материал для повторения: линейные уравнения, квадратные уравнения, формула средней скорости, относительная скорость при движении с опережением.

Разные задания на движение по дороге нескольких (обычно двух) транспортных средств. При решении следует вспомнить, что транспортные средства, имеющие собственные скорости v_1 и v_2, при движении с опережением движутся друг относительно друга со скоростью $v_1 - v_2$ (или $v_2 - v_1$). С учётом сказанного следует построить математическую модель (линейное или квадратное уравнение) и найти корни уравнения. После получения корней уравнения следует учитывать, что скорость, время и расстояние являются положительными величинами.

Задание 22: движение по реке

Материал для повторения: линейные уравнения, квадратные уравнения, формула средней скорости, связь собственной скорости со скоростью по течению и против течения.

Разные задания на движение по реке. При решении обычно используются две скорости: $v_{\text{теч.}}$ (скорость течения реки) и $v_{\text{соб.}}$ (собственная скорость лодки, катера или корабля). Тогда скорость лодки по течению равна $v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}$, а скорость против течения $v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}$. Также следует помнить, что плот имеет нулевую собственную скорость и движется по течению со скоростью $v_{\text{теч.}}$.

С учётом сказанного следует построить математическую модель (линейное или квадратное уравнение) и найти корни уравнения. После получения корней уравнения следует учитывать, что скорость, время и расстояние являются положительными величинами.

Задание 22: совместная работа

Материал для повторения: линейные уравнения, квадратные уравнения, формула для производительности.

По аналогии с задачами на движение основная формула в задачах на производительность — это $V = pt$, где V — объём работы, p — производительность, t — время. При совместной работе суммарная производительность равна сумме производительностей отдельных участников: $p = p_1 + p_2$.

С учётом сказанного следует построить математическую модель (линейное или квадратное уравнение) и найти корни уравнения. После получения корней уравнения следует помнить, что объём работ, время и производительность являются положительными величинами.

§ 3. Модуль «Алгебра», задание 23

В данном задании чаще всего предлагается построить график некоторой функции и определить, при каких значениях параметра построенный график будет иметь определённое число точек пересечения с прямой, заданной при помощи этого параметра. По типу функций можно произвести классификацию предлагаемых заданий.

Типы заданий	Номера вариантов
Прямая	5*, 6, 7, 8
Линейная с выражениями под знаком модуля	25*, 26
Парабола	27, 28, 29*, 30, 33*, 34
Гипербола	9*, 10, 11, 12, 17*, 18, 19, 20, 31, 32
Парабола с модулем	1*, 2, 3, 4
Кусочно-заданные функции	13*, 14, 15, 16, 21*, 22, 23, 24, 35, 36
Парабола, заданная при помощи параметра	37*, 38, 39, 40

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Решение заданий номер 23 обычно выполняются следующим образом.

1. При необходимости выполняется упрощение формулы, которой определяется функция. Формула приводится к виду, удобному для построения графика. Например, формулу для построения гиперболы удобно привести к виду $y = a + \frac{d}{x+b}$.

2. Осуществляется построение графика функции. Прямая строится по двум точкам. Для параболы определяются координаты вершины и несколько вспомогательных точек. Для гиперболы определяются вертикальные и горизонтальные асимптоты и несколько вспомогательных точек. Кусочно-заданные функции (а также функции, заданные выражением со знаком модуля) удобно строить на отдельных интервалах.

Для всех видов графиков необходимо определить точки, которые будут на графике «выколоты» (точки, не включаемые в область определения *исходной* функции). Если функция кусочно-заданная, необходимо обратить внимание на граничные точки (проверить правильность их построения).

3. После построения графика функции необходимо определить значения параметра (k), при которых прямая $y = k$ (или $y = kx$) пересекает построенный ранее график в заданном числе точек. Здесь следует помнить, что формула $y = k$ задаёт, в зависимости от k, некоторую горизонтальную прямую. То есть необходимо найти все горизонтальные прямые, удовлетворяющие требуемому условию. Формула $y = kx$ задаёт прямую, проходящую через начало координат. В случае работы с такой формулой необходимо найти все прямые, проходящие через начало координат и удовлетворяющие заданному условию.

Реже встречаются задания, где сначала следует найти необходимые значения параметра, а затем уже строить графики. В данном пособии подобные задания представлены в вариантах с номерами 37–40. Решение в этом случае производится следующим образом.

1. В условии дана парабола, зависящая от параметра, и прямая. Требуется определить значение параметра, при котором они будут иметь ровно одну точку пересечения. Например, в варианте № 38 парабола задаётся формулой $y = x^2 + ax$, а прямая — формулой $y = 2x - 1$. Одна точка пересечения у этих графиков будет в случае, когда уравнение $x^2 + ax = 2x - 1$ будет иметь ровно одно решение. Следовательно, дискриминант квадратного уравнения $x^2 + (a-2)x + 1 = 0$ должен быть равен нулю: $(a-2)^2 - 4 = 0$, откуда $a = 0$ и $a = 4$.

2. Для каждого значения параметра необходимо построить соответствующую параболу. В рассматриваемом примере это параболы $y = x^2$ и $y = x^2 + 4x$. Также необходимо построить в тех же координатных осях график прямой $y = 2x - 1$, отметив точку её пересечения с каждой из парабол.

§ 4. Модуль «Геометрия», задание 24

Геометрическая задача повышенного уровня сложности, результатом решения которой является нахождение некоторой величины (длины́, угла, площади). В таблице указана тематика предлагаемых заданий (одно задание может быть отнесено сразу к нескольким темам).

Темы заданий	**Номера вариантов**
Трапеция	1*, 2, 3, 4, 5*, 6, 7, 8, 15, 16, 21*, 22, 25*, 26
Ромб	11, 12, 37*, 38
Параллелограмм	27, 28, 39, 40
Равнобедренный треугольник	1*, 2, 3, 4, 33*, 34
Теорема Пифагора	5*, 7, 9*, 10, 11, 12, 13*, 15, 16, 21*, 22, 25*, 26, 27, 28, 31, 32
Высота, проведённая к гипотенузе	29*, 30
Подобные треугольники	5*, 7, 9*, 10, 15
Теорема синусов	5*, 14, 16, 23, 24
Теорема косинусов	11, 12, 13*, 14
Окружность	1*, 2, 3, 4, 5*, 7, 9*, 10, 11, 12, 13*, 15, 16, 17*, 18, 19, 20, 23, 24, 33*, 34, 35, 36
Касательная к окружности	1*, 2, 3, 4, 11, 12, 35, 36
Свойство отрезков пересекающихся хорд	17*, 18, 19, 20
Средняя линия треугольника и трапеции	6, 8, 9*, 10, 15
Углы при паре параллельных прямых и секущей	6, 8, 9*, 39, 40

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Это относительно простая геометрическая задача на вычисление, как правило, 2—3-шаговая. Вообще говоря, она не превышает обязательный уровень, но проверяет знание основных теорем, терминов и умение применять их и записывать решение, аргументируя свои действия. Её полное решение оценивается в 2 балла. Также за неё можно получить 1 балл, если не написать ссылки на использованные теоремы или при наличии верного решения, пояснений и ссылок допустить арифметическую ошибку.

Методика решения заданий этого типа приведена в пособии «Геометрия. Задачи ОГЭ с развёрнутым ответом. 9 класс» (автор В. А. Дрёмов). Там же представлены примеры работ, выполненных учащимися, с указанием экспертных оценок за эти работы.

§ 5. Модуль «Геометрия», задание 25

Геометрическая задача повышенного уровня сложности, результатом решения которой является доказательство некоторого утверждения. В таблице указана тематика предлагаемых заданий (одно задание может быть отнесено сразу к нескольким темам).

Темы заданий	Номера вариантов
Трапеция	22, 23, 25*, 26, 29*, 30, 37*
Ромб	1*, 21*, 29*, 30
Параллелограмм	1*, 2, 4, 19, 20, 21*
Равнобедренный треугольник	22, 36
Теорема Пифагора	13*, 14, 15, 16, 32
Равные треугольники	1*, 2, 3, 4, 25*, 27, 28, 36, 40
Подобные треугольники	5*, 6, 7, 8, 11, 17*, 18, 19, 28, 33*, 34, 35, 36, 38
Теорема синусов	9*
Окружность	9*, 10, 13, 14, 15, 16, 17*, 26, 27, 31*, 36, 39
Касательная к окружности	10, 15, 16, 27, 36
Средняя линия треугольника и трапеции	12, 29*, 30, 35
Углы при паре параллельных прямых и секущей	2, 4, 11, 21*, 22, 29*

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Задача 25 ОГЭ — задача по геометрии повышенного уровня на доказательство. Она сложнее задачи 24 как логически, так и технически, но не существенно. Её полное решение оценивается в 3 балла.

Методика решения заданий этого типа приведена в пособии «Геометрия. Задачи ОГЭ с развёрнутым ответом. 9 класс» (автор В. А. Дрёмов). Там же представлены примеры работ, выполненных учащимися, с указанием экспертных оценок за эти работы.

§ 6. Модуль «Геометрия», задание 26

Геометрическая задача высокого уровня сложности, результатом решения которой является нахождение некоторой величины (длины, угла, площади). В таблице указана тематика предлагаемых заданий (одно задание может быть отнесено сразу к нескольким темам).

Темы заданий	Номера вариантов
Трапеция	9*, 10, 11, 12, 17*, 18, 19, 20, 34, 36
Ромб	1*, 2, 3, 4, 7, 8, 27, 28, 40
Параллелограмм	1*, 2, 3, 4, 17*
Равнобедренный треугольник	5*, 6, 9*, 11, 12, 17*
Теорема Пифагора	6, 10, 11, 12, 13*, 14, 17*, 18, 22, 27, 36, 38
Равные треугольники	19, 20
Подобные треугольники	10, 11, 12, 13*, 17*, 18, 19, 20, 25*, 26, 28, 29*, 30, 31, 37*
Теорема синусов	33*, 35, 36
Теорема косинусов	16, 28
Окружность	7, 8, 13*, 14, 15, 16, 17*, 18, 21*, 22, 29*, 30, 31, 33*, 35, 36, 37*, 38
Касательная к окружности	13*, 14, 15, 16, 21*, 22, 37*, 38
Свойство биссектрисы треугольника	23, 24, 39
Углы при паре параллельных прямых и секущей	9*, 19

* Звёздочкой отмечены варианты, решение которых приведено в основной книге.

Задача 26 — задача высокого уровня сложности, такие задания требуют свободного владения не только геометрическим, но и алгебраическим материалом и рассчитаны на выпускников, которые изучали математику дополнительно к стандартному курсу, например по углублённой программе или в рамках кружков или элективных курсов. Следует тем не менее заметить, что весь теоретический материал, необходимый для решения этих задач, входит в школьный курс.

Требования к записи решения такие же, как и к другим задачам: полное и математически грамотное решение, понятный ход рассуждений учащегося. Запись решения должна удовлетворять указанным выше требованиям, а в остальном может быть произвольной. Нерациональное решение не является основанием для уменьшения числа выставленных баллов. За полное решение выставляется 4 балла.

Методика решения заданий этого типа представлена в пособии «Геометрия. Задачи ОГЭ с развёрнутым ответом. 9 класс» (автор В. А. Дрёмов). Там же представлены примеры работ, выполненных учащимися, с указанием экспертных оценок за эти работы.

Глава I. Решения части 2 избранных вариантов

Решение варианта 2

21. $x^4 + x^2 - 2x = 0$.

1. Понизим степень исследуемого многочлена, произведя вынос за скобку общего множителя x: $x(x^3 + x - 2) = 0$, отсюда $x = 0$ или $x^3 + x - 2 = 0$.
2. Разложим многочлен $x^3 + x - 2$ на множители. Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения $x^3 + x - 2 = 0$. Тогда $x^3 - 1 + x - 1 = 0$ или $(x-1)(x^2 + x + 1) + (x - 1) = 0$, $(x-1)(x^2 + x + 2) = 0$. Квадратный трёхчлен $x^2 + x + 2$ не имеет корней.
3. Итак, исходное уравнение имеет два корня: $x = 0$, $x = 1$.

Ответ: 0; 1.

22. 1. Средняя скорость вычисляется как отношение всего пути ко времени, затраченному на этот путь.
2. Весь путь составляет $100 + 132 + 120 = 352$ км.
3. Для подсчёта времени, потраченного на весь путь, найдём время, потраченное на преодоление отдельных участков пути. 120 км автобус проехал за $120 : 60 = 2$ часа, 100 км за $100 : 40 = 2{,}5$ часа и 132 км за $132 : 24 = 5{,}5$ часа. Общее время $2 + 2{,}5 + 5{,}5 = 10$ часов.
4. Средняя скорость равна $352 : 10 = 35{,}2$ км/ч.

Ответ: 35,2 км/ч.

23. Построим сначала график функции $y = 7 - (x-4)^2$. Для этого график функции $y = -(x-4)^2$ перенесём параллельно вверх на 7 единиц. Затем ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox, отобразим симметрично относительно оси абсцисс. Получим график функции $y = |7 - (x-4)^2|$. Наконец, перенесём параллельно вверх на одну единицу последний график и получим график функции $y = |7 - (x-4)^2| + 1$ (см. рис. 1). Прямая $y = 1$ имеет с графиком ровно две общие точки. Любая прямая $y = c$, где $c > 8$, имеет с графиком функции $y = |7 - (x-4)^2|$ ровно две общие точки.

Ответ: $\{1\} \cup (8; +\infty)$.

24. $\angle BCA = \angle ADC = 60^\circ$ (см. рис. 2), так как $\angle BCA$ — это угол между касательной BC и хордой AC. $\angle ADC$ вписанный, опирается на ту же дугу, что и $\angle BCA$. Из прямоугольного треугольника ABC найдём AB: $\dfrac{AB}{BC} = \operatorname{tg} 60^\circ$, $AB = \sqrt{3}$.

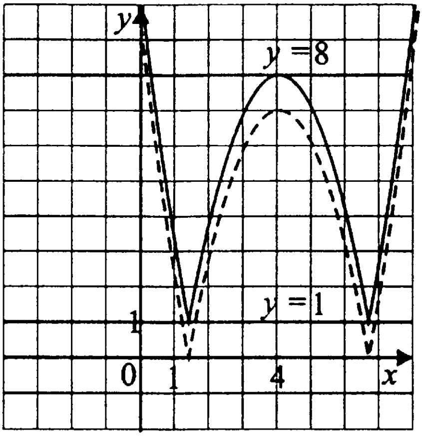


Рис. 1

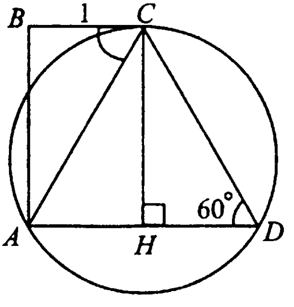


Рис. 2

Проведём $CH \perp AD$. $CH = AB = \sqrt{3}$. Найдём CD из прямоугольного треугольника CDH: $\dfrac{CH}{CD} = \sin 60°$, $CD = \dfrac{CH}{\sin 60°}$, $CD = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2$.

Ответ: 2.

25. По условию $MC \parallel ND$, следовательно, $BC \parallel AD$. $\angle MBN = \angle ANB$, как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BN, $\angle ABN = \angle MBN$ (BN — биссектриса) и тогда $\angle ABN = \angle ANB$, следовательно, $\triangle ABN$ — равнобедренный, откуда следует, что $AB = AN$ (см. рис. 3). Аналогично $\angle NAM = \angle AMB$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AM, следовательно $\triangle ABM$ равнобедренный, откуда $AB = BM$.

Получим: $AB = AN = BM$, по условию $MC = ND$, поэтому $AN + ND = BM + MC$ или $AD = BC$. Поскольку $BC \parallel AD$ и $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

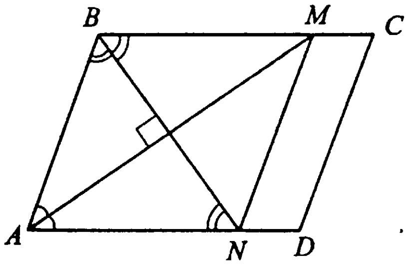


Рис. 3

26. Докажем, что $ABCD$ — ромб.
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, так как $\overrightarrow{BC}\{3; 1\}$, $\overrightarrow{AD}\{3; 1\}$ (см. рис. 4).

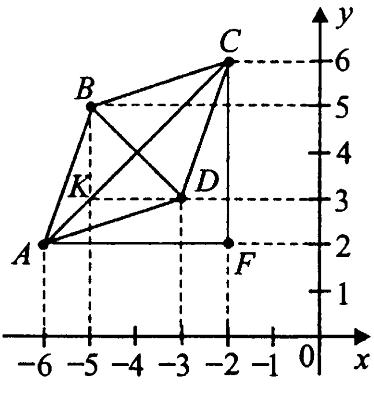


Рис. 4

Это означает, что $BC = AD$ и $BC \parallel AD$, то есть $ABCD$ — параллелограмм. $BC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. $\overrightarrow{AB}\{1; 3\}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$. Так как $AB = BC$, то $ABCD$ — ромб.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$

AC найдём из прямоугольного треугольника AFC: $AC = 4\sqrt{2}$.
BD найдём из прямоугольного треугольника BKD: $BD = 2\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8.$

Ответ: 8.

Решение варианта 3

21. $3x^4 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x^3 - 2x - 1) = 0$. Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения $3x^3 - 2x - 1 = 0$. Выделим множитель $x - 1$ (см. рис. 5).

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-2x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -\underline{3x^3-3x^2} & 3x^2+3x+1 \\ 3x^2-2x & \\ -\underline{3x^2-3x} & \\ x-1 & \\ -\underline{x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Рис. 5

Итак, $3x^3 - 2x - 1 = (x-1)(3x^2+3x+1)$, а исходное уравнение равносильно уравнению $x(x-1)(3x^2+3x+1) = 0$. Так как квадратный трёхчлен $3x^2 + 3x + 1$ не имеет корней, то уравнение $x(x-1)(3x^2+3x+1) = 0$ имеет два корня: $x = 0$, $x = 1$.

Ответ: 0; 1.

22. Первые 110 км автомобиль проехал за 2 часа: $110 : 55 = 2$. Следующие 120 км — за 2 часа: $120 : 60 = 2$. Последние 140 км — за 2 часа: $140 : 70 = 2$.

Итак, на весь путь автомобиль потратил 6 часов. Весь путь составляет 370 км. Тогда средняя скорость вычисляется по формуле $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}$.

$370 : 6 = 61\frac{2}{3}$ (км/ч).

Ответ: $61\frac{2}{3}$ (км/ч).

23. Построим сначала график функции $y = 1 - (x+3)^2$. Для этого график функции $y = -(x+3)^2$ перенесём параллельно вверх на единицу. Затем ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox, отобразим симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 6). Получим график функции $y = \left|1 - (x+3)^2\right|$.

Прямая $y = 0$ имеет с графиком функции $y = \left|1 - (x+3)^2\right|$ ровно две общие точки. Любая прямая $y = c$, где $c > 1$, имеет с графиком функции $y = \left|1 - (x+3)^2\right|$ ровно две общие точки.

Ответ: $c = 0$; $c > 1$.

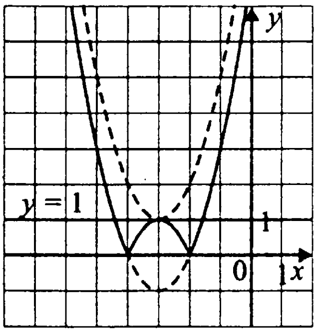


Рис. 6

24. $CO \perp AD$, так как OC — радиус, проведённый в точку касания, $BC \parallel AD$ (см. рис. 7). H — точка пересечения CO и AD. $CH \parallel AB$. $CH = AB$, $CH < CO$, так как $\angle ACD$ — тупой. $\angle ACB = \angle ADC = 30°$, так как $\angle ADC$ вписанный, опирающийся на дугу AC, а $\angle ACB$ — угол между касательной и хордой — измеряется половиной дуги, заключённой между ними.

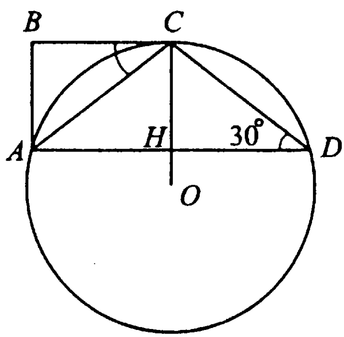


Рис. 7

В прямоугольном $\triangle ABC$ $\dfrac{AB}{BC} = \operatorname{tg} 30°$, $AB = BC \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

25. $\angle BAN = \alpha$, $\angle ANB = \beta$ (см. рис. 8). Тогда $\alpha + \beta = 90°$, так как $\triangle ABN$ прямоугольный. $\angle AMD = \angle ANB = \beta$, так как $\triangle ABN = \triangle ADM$ по двум катетам. В $\triangle AOM$ сумма двух углов равна $90° = \alpha + \beta$, значит, третий угол равен $90°$. Это означает, что $MD \perp AN$.

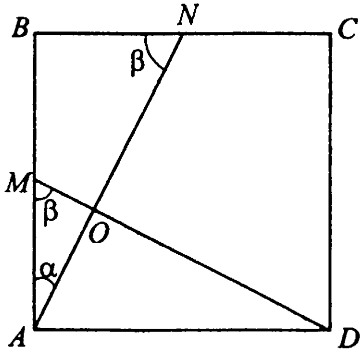


Рис. 8

26. Докажем, что $ABCD$ — ромб (см. рис. 9). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB}\{1;3\}$, $\overrightarrow{DC}\{1;3\}$. Это означает, что $AB = DC$ и $AB \parallel DC$, то есть $ABCD$ — параллелограмм. $AB = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$, $\overrightarrow{BC} = \{3;1\}$, $BC = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$. Так как $AB = BC$, то $ABCD$ — ромб.

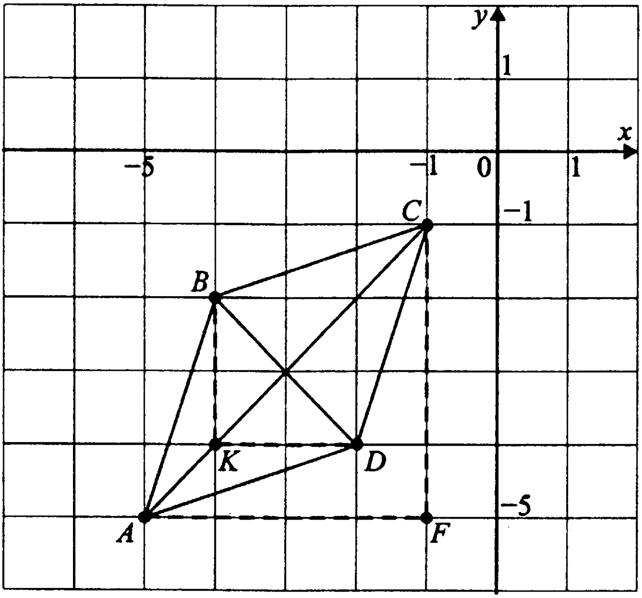


Рис. 9

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. AC найдём из прямоугольного треугольника AFC: $AC = \sqrt{AF^2 + CF^2}$. $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. BD найдём из прямоугольного треугольника BKD: $BD = 2\sqrt{2}$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8$.

Ответ: 8.

Решение варианта 4

21. $2x^4 - x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^3 - x - 1) = 0$. Заметим, что $x = 1$ является корнем уравнения $2x^2 - x - 1 = 0$. Выделим множитель $x - 1$:
$2x^3 - x - 1 = 2x^3 - 2x + x - 1 = 2x(x^2 - 1) + (x - 1) =$
$= 2x(x-1)(x+1) + (x-1) = (x-1)(2x(x+1)+1) = (x-1)(2x^2+2x+1)$.
Так как квадратный трёхчлен $2x^2 + 2x + 1$ не имеет корней, то уравнение $2x^4 - x^2 - x = 0$, равносильное уравнению $x(x - 1)(2x^2 + 2x + 1) = 0$, имеет два корня: $x = 0$, $x = 1$.

Ответ: 0; 1.

22. Первые 70 км автомобиль проехал за 1 час: $70 : 70 = 1$. Следующие 100 км — за 2 часа: $100 : 50 = 2$. Последние 130 км — за 2 часа: $130 : 65 = 2$.

Время, затраченное автомобилем на весь путь, равно 5 часам. Весь путь составляет 370 км. Тогда средняя скорость вычисляется по формуле $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}$. $300 : 5 = 60$ (км/ч).

Ответ: 60 км/ч.

23. Для построения графика функции $y = |5 - (x + 2)^2| + 1$ построим сначала график функции $y = -(x + 2)^2$, затем перенесём параллельно вверх на 5 единиц. Ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox, отобразим симметрично относительно оси абсцисс. Наконец, график функции $y = |5-(x+2)^2|$ с помощью параллельного переноса поднимем на единицу вверх (см. рис. 10).

Любая прямая $y = c$, где $c > 6$, имеет с графиком функции $y = |5 - (x + 2)^2| + 1$ ровно две общие точки. Прямая $y = 1$ имеет с графиком функции $y = |5 - (x + 2)^2| + 1$ ровно две общие точки.

Ответ: $c = 1$; $c > 6$.

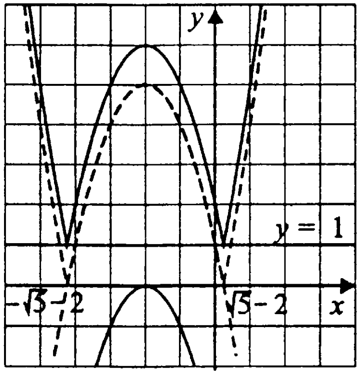


Рис. 10

24. C — точка касания, поэтому $CO \perp BC$ (см. рис. 11). H — точка пересечения прямой CO и хорды AD. $CH \parallel AB$. $AO = OD$, как радиусы. В равнобедренном прямоугольном треугольнике AOD OH является медианой, высотой и биссектрисой. $OH = \frac{1}{2}AD = AH$. $AD = 4$, $AO = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, $AB = CH = CO + OH = AO + AH = 2\sqrt{2} + 2$.

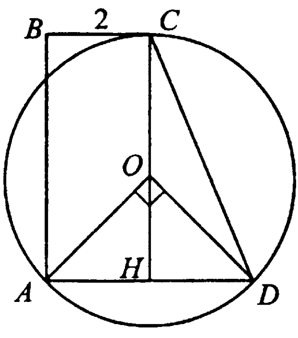


Рис. 11

Ответ: $2\sqrt{2} + 2$.

25. $\triangle BKF \sim \triangle AFD$ по двум углам ($\angle KBD = \angle ADB$ как накрест лежащие при $BK \parallel AD$ и секущей BD, $\angle BKA = \angle KAD$ как накрест лежащие при $BK \parallel AD$ и секущей AK), $BK = \frac{1}{2}AD$ по условию, значит, коэффициент подобия равен $\frac{1}{2} : \frac{BF}{FD} = \frac{1}{2}$, откуда $FD = 2BF$, $BD = 3BF$ (см. рис. 12). Следовательно, $BF : BD = 1 : 3$.

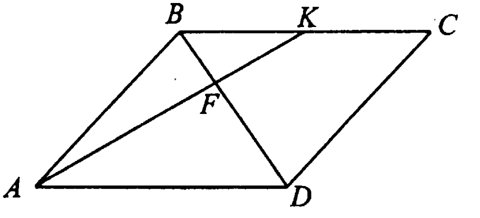


Рис. 12

26. Покажем, что $ABCD$ — параллелограмм. $\overrightarrow{AB}\{1; -3\}$, $\overrightarrow{DC}\{1; -3\}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, это означает, что $AB = DC$ и $AB \parallel DC$ (см. рис. 13). Заметим, что точки A и C лежат на прямой $y = -x$, а точки D и B симметричны относительно этой прямой, следовательно, $BD \perp AC$. Итак, $ABCD$ — ромб. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

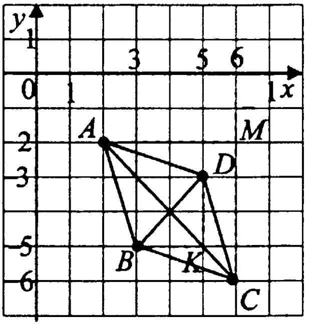


Рис. 13

AC найдём из прямоугольного треугольника ACM:
$AC = \sqrt{AM^2 + CM^2}$. $AC = 4\sqrt{2}$. BD найдём из прямоугольного треугольника BKD: $BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 2\sqrt{2}$. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 8$.

Ответ: 8.

Решение варианта 6

21. $\dfrac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot 5^n}=\dfrac{5^{n-1}(1+125)}{6\cdot 5^n}=\dfrac{126}{5\cdot 6}=\dfrac{21}{5}=4{,}2.$

Ответ: 4,2.

22. Пусть неизвестная скорость второго автомобиля равна x км/ч. По условию первый автомобиль опередит второй на один круг через 45 минут, что составляет $\dfrac{3}{4}$ часа. Тогда получим уравнение $\dfrac{21}{85-x}=\dfrac{3}{4}$,

$84=(85-x)\cdot 3$, $84=85\cdot 3-3x$, $x=\dfrac{85\cdot 3-84}{3}$, $x=57$.

Ответ: 57 км/ч.

23. $y=\dfrac{2x^2-4x-30}{x+3}$.

$2x^2-4x-30=0$, $x^2-2x-15=0$, $x_{1,2}=1\pm 4$, $x_1=-3$, $x_2=5$.

$y=\dfrac{2x^2-4x-30}{x+3}=\dfrac{2(x+3)(x-5)}{x+3}=2(x-5)$, при $x\neq -3$.

Построим график функции $y=2(x-5)$, $x\neq -3$ (см. рис. 14).

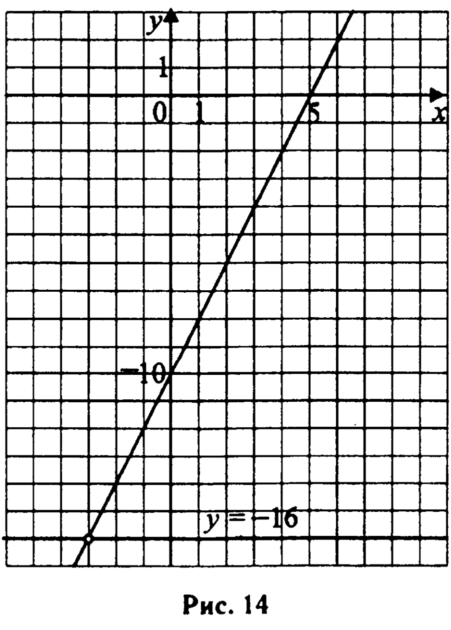


Рис. 14

Прямая $y = -16$ не имеет с графиком функции $y = \dfrac{2x^2 - 4x - 30}{x+3}$ общих точек. Других таких горизонтальных прямых нет.

Ответ: -16.

24. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$, $AB = CD$ (см. рис. 15). По условию $\angle ABD = \angle DBC$, $AB = CD$, $P - AD = 19$, где P — периметр трапеции, $MN = 6$.

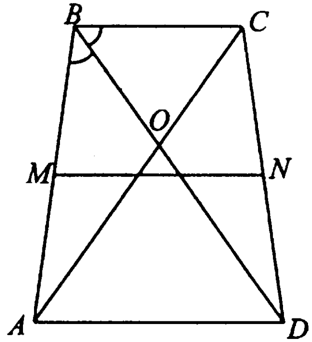


Рис. 15

Необходимо найти BC.

MN — средняя линия, $2MN = AD + BC$, $\angle ADB = \angle DBC$ — как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD. Значит, $\angle ABD = \angle ADB$.

Отсюда $\triangle ABD$ — равнобедренный и $AB = AD$.

Периметр P трапеции равен $2AB + BC + AD = 2AD + 2MN = 2AD + 12$. Используя условие $P - AD = 19$, имеем $2AD + 12 - AD = 19$, $AD = 7$. Следовательно, $BC = 12 - 7 = 5$.

Ответ: 5.

25. Отрезок MN проведён параллельно основаниям через точку C (см. рис. 16). Треугольники FCL и EKC подобны (по двум углам), значит, $\dfrac{EC}{CL} = \dfrac{CK}{FC}$.

$\dfrac{EC}{CL} + 1 = \dfrac{CK}{FC} + 1$, $\dfrac{EC + CL}{CL} = \dfrac{CK + CF}{FC}$, $\dfrac{EL}{CL} = \dfrac{FK}{FC}$. С другой стороны, $\triangle EKL \sim \triangle CNL$ ($\angle EKL = \angle CNL$ как соответственные при $EK \parallel CN$ и секущей KN, $\angle L$ — общий) $\Rightarrow \dfrac{EK}{CN} = \dfrac{EL}{CL}$.

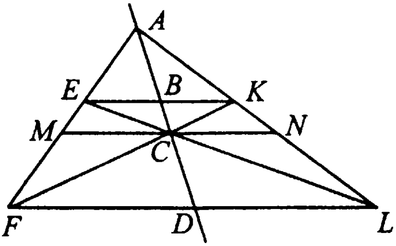


Рис. 16

$\triangle EKF \sim \triangle MCF \Rightarrow \dfrac{EK}{MC} = \dfrac{KF}{CF}$, но $\dfrac{FK}{FC} = \dfrac{EL}{CL} \Rightarrow \dfrac{EK}{MC} = \dfrac{EK}{CN} \Rightarrow$ $MC = CN$.

$\triangle AFD \sim \triangle AMC \Rightarrow \dfrac{FD}{MC} = \dfrac{AD}{AC}$.

Аналогично $\dfrac{DL}{CN} = \dfrac{AD}{AC}$, отсюда $\dfrac{FD}{MC} = \dfrac{DL}{CN}$. Из того, что $MC = CN$ следует: $FD = DL$. Аналогично доказываем, что $\dfrac{MC}{EB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CN}{BK}$, тогда $EB = BK$, что и требовалось доказать.

26. В равнобедренном треугольнике ABC высота BH, проведённая к основанию, является медианой, то есть $AH = HC = \dfrac{18}{2} = 9$ (см. рис. 17). $AM = MB$, MH — средняя линия $\triangle ABC$ и $BC = 2MH$. По условию $MH = BH$, следовательно, $BC = 2BH$.

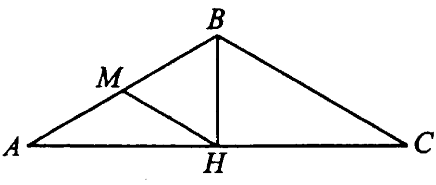


Рис. 17

По теореме Пифагора $BC^2 = BH^2 + CH^2$, $(2BH)^2 = BH^2 + 9^2$, $3BH^2 = 81$, $BH = 3\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BH = \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

Ответ: $27\sqrt{3}$.

Решение варианта 7

21. Преобразуем дробь $\dfrac{\sqrt{16\sqrt[5]{a}}}{\sqrt[10]{a}} = \dfrac{\sqrt{16}\cdot\sqrt[10]{a}}{\sqrt[10]{a}} = \sqrt{16} = 4.$

Ответ: 4.

22. Пусть неизвестная скорость второго автомобиля x км/ч. По условию первый автомобиль догонит второй через 45 минут, что составляет $\dfrac{3}{4}$ часа.

Тогда имеем $\dfrac{15}{95-x} = \dfrac{3}{4}$, $60 = 285 - 3x$; $3x = 225$, $x = 75$ (км/ч).

Ответ: 75 км/ч.

23. $y = \dfrac{x^2+4x-21}{x-3}$.

$x^2 + 4x - 21 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -7$.

$y = \dfrac{(x-3)(x+7)}{x-3} = x + 7$, при $x \neq 3$.

Построим график функции $y = x + 7$, $x \neq 3$ (см. рис. 18).

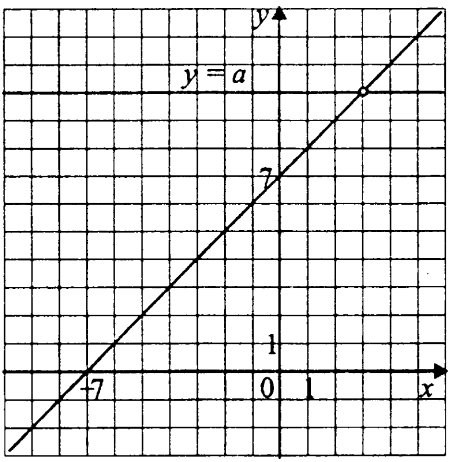


Рис. 18

Прямая $y = 10$ не имеет с графиком функции $y = \dfrac{x^2+4x-21}{x-3}$ общих точек. Других таких прямых нет.

Ответ: 10.

24. $ABCD$ — трапеция, по условию $AB = CD$, $BC = 14$, $AD = 40$. Пусть R — радиус окружности, описанной около трапеции, BH — высота трапеции (см. рис. 19), O — центр описанной окружности.

$BH = NM$, где $NM \parallel BH$ и $O \in NM$. $NM = NO + MO =$
$= \sqrt{BO^2 - BN^2} + \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - 7^2} + \sqrt{R^2 - 20^2} = 9.$

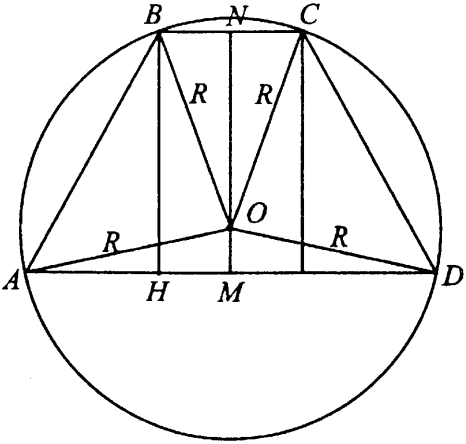


Рис. 19

$(R^2 - 49) + (R^2 - 400) = 81 - 2\sqrt{(R^2 - 49)(R^2 - 400)}.$

$2R^2 - 449 = 81 - 2\sqrt{(R^2 - 49)(R^2 - 400)};$

$2R^2 - 530 = -2\sqrt{(R^2 - 49)(R^2 - 400)};$

$265 - R^2 = \sqrt{(R^2 - 49)(R^2 - 400)}.$

Можно обозначить $R^2 - 49 = t$, тогда уравнение примет вид

$\sqrt{t(t - 351)} = 216 - t$, откуда $t = 24^2$.

$R^2 - 49 = 576$, $R^2 = 625$, $R = 25$.

Ответ: 25.

25. Треугольники KAQ и NAP подобны (по двум углам), значит,
$\dfrac{NA}{AQ} = \dfrac{PA}{AK}$ (см. рис. 20).

Прибавив единицу к обеим частям этого равенства, получим
$\dfrac{NA}{AQ} + 1 = \dfrac{PA}{AK} + 1$, $\dfrac{NA + AQ}{AQ} = \dfrac{PA + AK}{AK}$, $\dfrac{NQ}{AQ} = \dfrac{KP}{AK}$.

$\triangle NPQ \sim \triangle AMQ \Rightarrow \dfrac{NP}{AM} = \dfrac{NQ}{AQ}$.

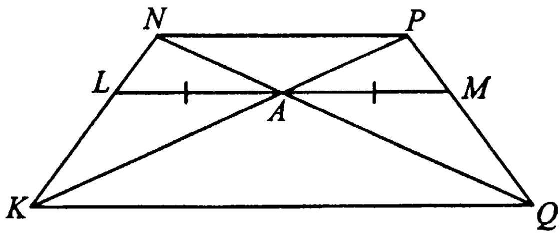


Рис. 20

$\triangle NPK \sim \triangle LAK \Rightarrow \dfrac{NP}{LA} = \dfrac{KP}{AK}$.

Но $\dfrac{KP}{AK} = \dfrac{NQ}{AQ}$, $\dfrac{NQ}{AQ} = \dfrac{NP}{AM}$, $\dfrac{KP}{AK} = \dfrac{NP}{AL} \Rightarrow \dfrac{NP}{AM} = \dfrac{NP}{AL} \Rightarrow$ $AM = LA$, что и требовалось доказать.

26. Рассмотрим ромб $ABCD$ (см. рис. 21). По условию $\angle ABC = \dfrac{2\pi}{3}$. $AB = 8$, необходимо найти площадь прямоугольника $MNPQ$, где M, N, P и Q — точки касания.

$S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}d^2 \sin\alpha$, где d — диагональ прямоугольника, α — угол между диагоналями.

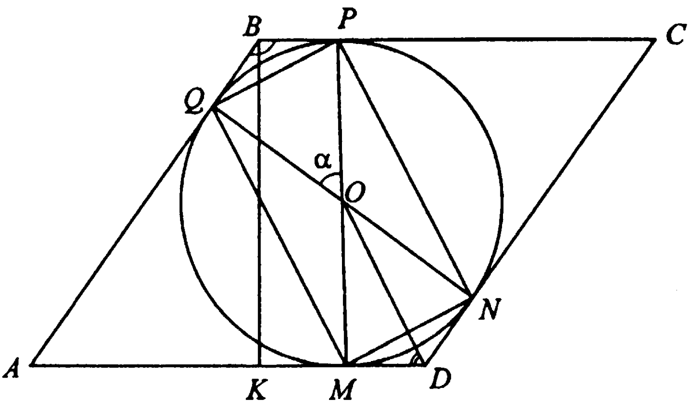


Рис. 21

$d = BK$. В $\triangle ABK : \angle BKA = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle BAK = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

$BK = AB \sin\angle BAK = 8\sin\dfrac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$.

В четырёхугольнике $OMDN$ сумма углов равна $360° = 2\pi$. $\angle OMD = \angle OND = \frac{\pi}{2}$, $\angle MDN = \frac{2\pi}{3}$, тогда

$\angle MON = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(4\sqrt{3})^2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 12\sqrt{3}$.

Ответ: $12\sqrt{3}$.

Решение варианта 8

21. Преобразуем дробь $\frac{\sqrt{25\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}} = 5$.

Ответ: 5.

22. Пусть неизвестная скорость второго автомобиля равна x км/ч. По условию первый автомобиль опередит второй на один круг через 40 минут, что составляет $\frac{2}{3}$ часа. Тогда получим уравнение $\frac{19}{95-x} = \frac{2}{3}$,

$57 = (95-x)\cdot 2$, $57 = 95\cdot 2 - 2x$, $x = \frac{95\cdot 2 - 57}{2}$, $x = 66{,}5$ км/ч.

Ответ: 66,5.

23. $y = \frac{2x^2+3x-9}{x+3}$. Найдём корни квадратного трёхчлена, стоящего в числителе дроби.

$x = \frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{4}$; $x_1 = \frac{-3-9}{4} = -3$; $x_2 = \frac{-3+9}{4} = \frac{3}{2}$.

$$y = \frac{2x^2+3x-9}{x+3} = \frac{2(x+3)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x+3} = 2\left(x-\frac{3}{2}\right), \text{ при } x \neq -3.$$

Построим график функции $y = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)$, $x \neq -3$ (см. рис. 22).

Прямая $y = -9$ не имеет с графиком функции $y = \frac{2x^2+3x-9}{x+3}$ общих точек. Других таких горизонтальных прямых нет.

Ответ: -9.

4. Зак. № 71

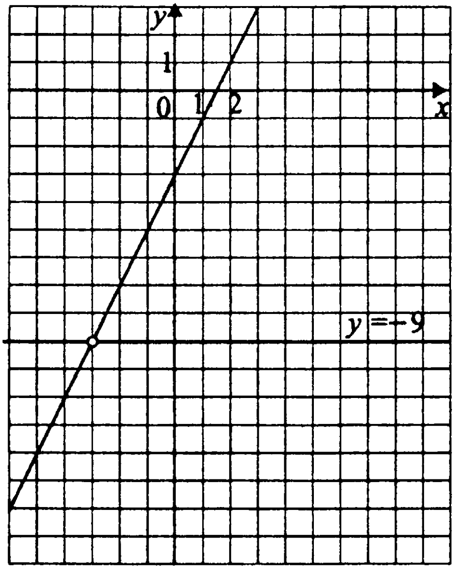


Рис. 22

24. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$, $AB = CD$ (см. рис. 23). По условию $\angle ABD = \angle DBC$, $AB = CD$, $P - AD = 25$, где P — периметр трапеции, MN — средняя линия, $MN = 8$.

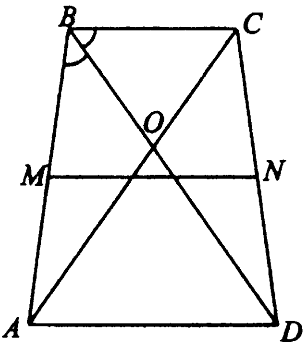


Рис. 23

Необходимо найти BC.

MN — средняя линия, $2MN = AD + BC$, $\angle ADB = \angle DBC$ — как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD. Значит, $\angle ABD = \angle ADB$.

Отсюда $\triangle ABD$ — равнобедренный и $AB = AD$.

Периметр P трапеции равен $2AB + BC + AD = 2AD + 2MN = 2AD + 16$. Используя условие $P - AD = 25$, имеем $2AD + 16 - AD = 25$, $AD = 9$. Следовательно, $BC = 16 - 9 = 7$.

Ответ: 7.

25. Отрезок BC проведён параллельно основаниям через точку O (см. рис. 24). Треугольники AOD и KNO подобны (по двум углам), значит, $\frac{KO}{OD} = \frac{ON}{AO}$.

$$\frac{KO}{OD} + 1 = \frac{ON}{AO} + 1,\ \frac{KO+OD}{OD} = \frac{ON+AO}{AO},\ \frac{KD}{OD} = \frac{AN}{AO}.$$

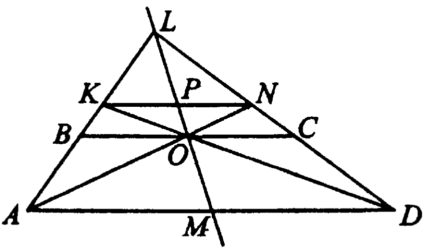


Рис. 24

С другой стороны, $\triangle KND \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{KN}{OC} = \frac{KD}{OD}$.

$\triangle KNA \sim \triangle BOA \Rightarrow \frac{KN}{BO} = \frac{NA}{AO}$, но $\frac{AN}{AO} = \frac{KD}{OD} = \frac{KN}{OC} \Rightarrow$ $\frac{KN}{BO} = \frac{KN}{OC} \Rightarrow BO = OC$.

$$\triangle LAM \sim \triangle LBO \Rightarrow \frac{AM}{BO} = \frac{LM}{LO}.$$

Аналогично $\frac{MD}{OC} = \frac{LM}{LO}$, отсюда $\frac{AM}{BO} = \frac{MD}{OC}$. Из того, что $BO = OC$, следует $AM = MD$. Аналогично доказываем, что $\frac{BO}{KP} = \frac{LO}{LP} = \frac{OC}{PN}$, тогда $KP = PN$, что и требовалось доказать.

26. Рассмотрим ромб $ABCD$ (см. рис. 25). По условию $\angle ABC = \frac{5\pi}{6}$. $AB = 10$, необходимо найти площадь прямоугольника $MNPQ$, где M, N, P и Q — точки касания.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha$, где d — диагональ прямоугольника, α — угол между диагоналями.

$d = BK$. В $\triangle ABK : \angle BKA = \frac{\pi}{2}, \angle BAK = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

$BK = AB \sin \angle BAK = 10 \sin\frac{\pi}{6} = 5.$

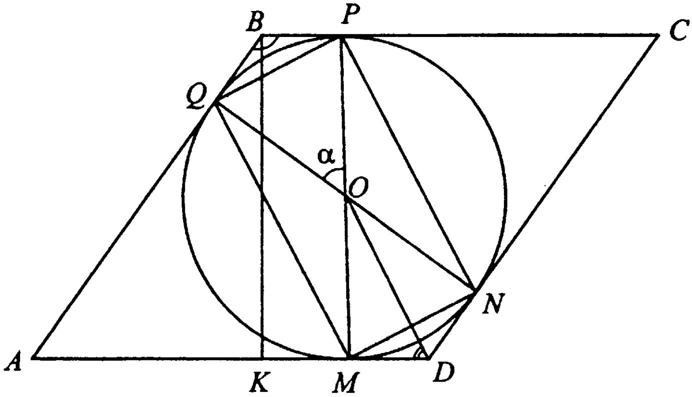


Рис. 25

В $\triangle OMD : \angle OMD = \frac{\pi}{2}; \angle ODM = \frac{5\pi}{6} : 2 = \frac{5\pi}{6 \cdot 2} = \frac{5\pi}{12}.$

$\angle MOD = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.$

Значит, $\angle MON = 2\angle MOD = 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}5^2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4} = 6{,}25.$

Ответ: 6,25.

Решение варианта 10

21. Найдём корни квадратного трёхчлена $x^2 - 8x + 15$.

$D = 16 - 15 = 1.$

$x_{1,2} = 4 \pm 1,$

$x_1 = 5.$

$x_2 = 3.$

Уравнение имеет вид $x(x-3)(x-5) = 4(3-x)$.

Решим его: $(x-3)(x(x-5)+4) = 0,$

$\left[\begin{array}{l} x - 3 = 0, \\ x(x-5) + 4 = 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x^2 - 5x + 4 = 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 4; 1. \end{array}\right.$

Ответ: 1; 3; 4.

22. Пусть во втором автобусе было x учащихся, тогда в первом автобусе было $1{,}5x$ учащихся, а в третьем — $1{,}5x+5$ учащихся. Составим уравнение $1{,}5x + x + 1{,}5x + 5 = 101$ и решим его.

$4x + 5 = 101, \quad 4x = 96, \quad x = 24.$

То есть во втором автобусе было 24 человека, а в третьем — 41 человек. Разность равна 17.

Ответ: 17.

23. $y = \dfrac{-x^2 - 6x - 5}{x^2 + 8x + 15} = -\dfrac{(x+5)(x+1)}{(x+3)(x+5)} = -\dfrac{x+1}{x+3} = -1 + \dfrac{2}{x+3}$ при $x \neq -5$.

Графиком функции $y = -1 + \dfrac{2}{x+3}$ служит гипербола, полученная сдвигом графика функции $y = \dfrac{2}{x}$ на 1 единицу вниз и на 3 единицы влево (см. рис. 26). Чтобы получить график исходной функции, нужно удалить из гиперболы точку $(-5; -2)$.

При $a = -1$ и $a = -2$ прямая $y = a$ не имеет с графиком функции общих точек.

Ответ: $-1; -2$.

24. По теореме Пифагора $AB^2 = 18^2 + 24^2 = 900$, $AB = 30$ (см. рис. 27). FK — средняя линия, параллельная стороне AC и равная $\dfrac{18}{2} = 9$.

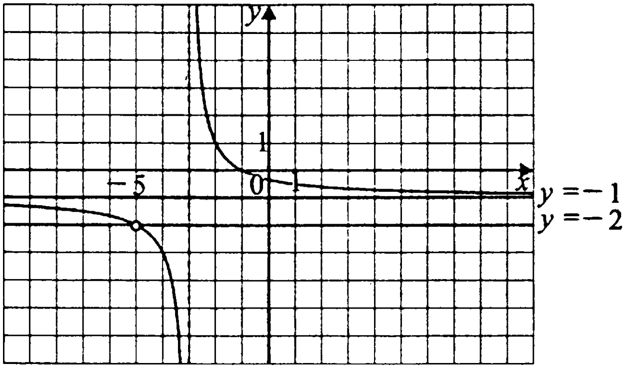


Рис. 26

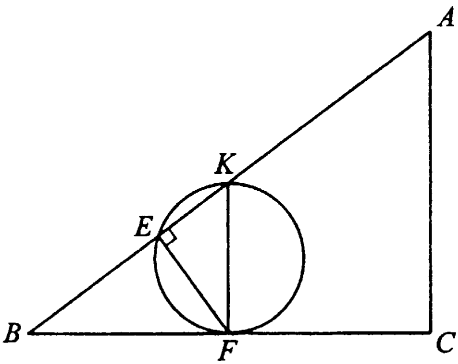


Рис. 27

$\angle BKF = \angle BAC$ как соответственные при $FK \parallel AC$ и секущей AB. Так как $\angle KEF$ вписанный, опирающийся на диаметр, то $\angle KEF = 90^\circ = \angle ACB$. Отсюда $\triangle KFE \sim \triangle ABC$ (по двум углам) и $\frac{KE}{AC} = \frac{KF}{AB}$; $KE = \frac{AC \cdot KF}{AB} = \frac{18 \cdot 9}{30} = 5{,}4$.

Ответ: 5,4.

25. В $\triangle OO_1K$: $\angle OKO_1 = 90^\circ$, $KO_1 = 6 - 2 = 4$, $OO_1 = 6 + 2 = 8$ (см. рис. 28). $\cos\angle CO_1O = \frac{O_1K}{OO_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. $\angle CO_1O = 60^\circ$.

26. Обозначим $\angle 1 = \angle BAD$, $\angle 2 = \angle BCD$. $AD = 10$, $BC = 6$ (см. рис. 29). $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ (по условию), $\angle ABD = 90^\circ - \angle 1 = \angle 2$, $\angle CDB = 90^\circ - \angle 2 = \angle 1$. $\angle ABD \sim \triangle BCD$ (по двум углам), $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BD}$, $BD^2 = 6 \cdot 10 = 60$.

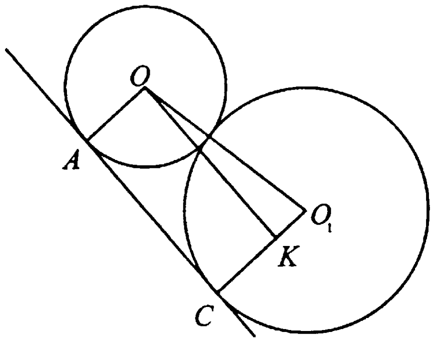


Рис. 28

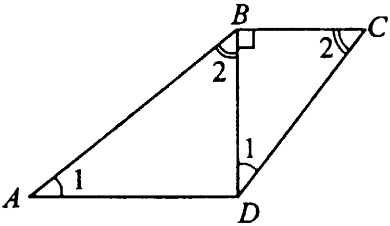


Рис. 29

$\triangle ABD$: $AB^2 = BD^2 + AD^2 = 60 + 100 = 160$, $AB = 4\sqrt{10}$. $DC^2 = BC^2 + BD^2 = 36 + 60 = 96$, $AB = 4\sqrt{6}$.

Ответ: $4\sqrt{10}$; $4\sqrt{6}$.

Решение варианта 11

21. $x(x^2 - x - 6) = 15(x - 3)$,

$x(x + 2)(x - 3) = 15(x - 3)$,

$(x - 3)\big(x(x + 2) - 15\big) = 0$,

$(x - 3)(x^2 + 2x - 15) = 0$,

$(x - 3)(x - 3)(x + 5) = 0$.

$x_1 = 3$, $x_2 = -5$.

Ответ: -5; 3.

22. Пусть во второй день велосипедист проехал x км, тогда в третий день он проехал $0{,}65x$ км. По условию во второй день он проехал на 56 км больше, чем в третий день, отсюда $x - 0{,}65x = 56$, $0{,}35x = 56$, $x = 160$.

Во второй день пройдено 160 км, в третий день — $160 - 56 = 104$ км, в первый день — $0{,}3 \cdot 104 = 31{,}2$ км. Всего $160 + 104 + 31{,}2 = 295{,}2$ км.

Ответ: 295,2.

23. $y = \dfrac{4x^2 - 17x + 4}{x^2 - 4x} = \dfrac{4(x^2 - 4x) - x + 4}{x^2 - 4x} = 4 - \dfrac{x - 4}{x^2 - 4x} = 4 - \dfrac{1}{x}$, $x \neq 4$.

Графиком функции $y = 4 - \frac{1}{x}$ является гипербола $y = -\frac{1}{x}$, смещённая на 4 единицы вверх вдоль оси Oy (см. рис. 30). Для получения графика исходной функции нужно также выколоть из графика точку $\left(4; 3\frac{3}{4}\right)$.

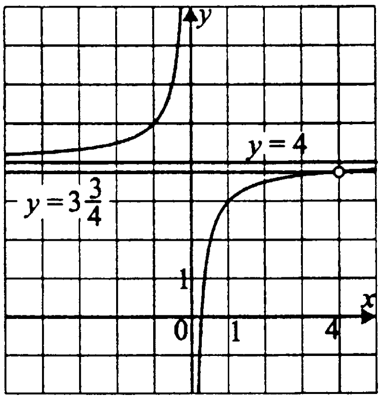


Рис. 30

Прямая $y = a$ не имеет общих точек с построенным графиком при $a = 4$ и $a = 3\frac{3}{4}$.

Ответ: 4; $3\frac{3}{4}$.

24. Пусть $ABCD$ — исходный ромб с углом $BAD = 45°$, $MNPQ$ — прямоугольник, образованный точками касания сторон ромба со вписанной в него окружностью (см. рис. 31). Тогда $\angle ABC = 180° - 45° = 135°$.

Тогда по теореме косинусов для $\triangle ABD$:
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\angle BAD =$
$= 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 200 - 100\sqrt{2}$, $BD = 10\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Отсюда $BO = \dfrac{BD}{2} = 5\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

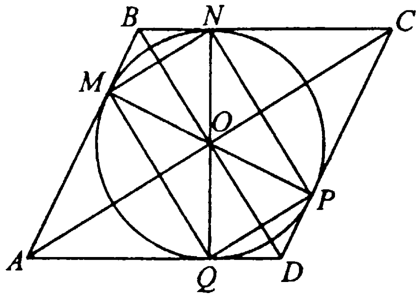


Рис. 31

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, поэтому из $\triangle ABO$ по теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 - BO^2 = 100 - 25(2-\sqrt{2}) = 50 + 25\sqrt{2}$, $AO = 5\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$S_{ABO} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}AO \cdot BO$, откуда

$$OM = \frac{AO \cdot BO}{AB} = \frac{5\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot 5\sqrt{2+\sqrt{2}}}{10} = \frac{25\sqrt{4-2}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Диагонали прямоугольника $MP = NQ = 2MO = 5\sqrt{2}$. Из четырёхугольника $MBNO$ $\angle MON = 360° - 90° - 135° - 90° = 45°$. Диагонали прямоугольника пересекаются под углом $45°$, искомая площадь равна

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot NQ \cdot \sin\angle MON = \frac{1}{2} \cdot (2OM)^2 \cdot \sin 45° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{25\sqrt{2}}{2}$.

25. Так как $AD \parallel BC \parallel MN$, то по теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BM}{BA} = \frac{CN}{CD} = k$, где k — некоторое число.

$\triangle MBK \sim \triangle ABD$ по двум углам ($\angle BMK = \angle BAD$, $\angle BKM = \angle BDA$ как соответственные при $MN \parallel AD$ и соответствующих секущих). Значит, $\frac{MK}{AD} = \frac{BM}{BA}$; $\frac{MK}{AD} = k$; $MK = k \cdot AD$.

Аналогично из подобия треугольников KCN и ACD следует, что $KN = k \cdot AD$. Следовательно, $KM = KN$, что и требовалось доказать.

26. Проведём в трапеции высоту KM (см. рис. 32). Тогда из $\triangle BKM$ и $\triangle CKM$ по теореме Пифагора:

$BM^2 = BK^2 - KM^2 = 7{,}5^2 - 6^2 = \frac{1}{4}(15^2 - 12^2) = \frac{81}{4}$; $BM = 4{,}5$;

$CM^2 = CK^2 - KM^2 = 6{,}5^2 - 6^2 = \frac{1}{4}(13^2 - 12^2) = \frac{25}{4}$; $CM = 2{,}5$.

$BC = 4{,}5 + 2{,}5 = 7$.

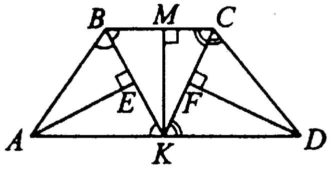


Рис. 32

$\angle CBK = \angle AKB$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BK, поэтому $\triangle ABK$ равнобедренный ($AB = AK$). Его высота AE является и медианой, поэтому $BE = EK = \frac{7{,}5}{2} = \frac{15}{4}$. $\triangle AEK \sim \triangle KMB$ ($\angle AEK = \angle KMB = 90°$, $\angle AKE = \angle KBM$), откуда $\frac{AK}{BK} = \frac{KE}{BM}$, $AK = \frac{BK \cdot KE}{BM} = \frac{7{,}5 \cdot 15}{4 \cdot 4{,}5} = 6{,}25$.

Аналогично $\triangle CDK$ равнобедренный, DF — его высота и медиана, $KF = \frac{13}{4}$, $KD = \frac{KF \cdot CK}{CM} = \frac{13 \cdot 6{,}5}{4 \cdot 2{,}5} = 8{,}45$.

$AD = AK + KD = 6{,}25 + 8{,}45 = 14{,}7$.

Ответ: 7; 14,7.

Решение варианта 12

21. $x(x^2 + 2x - 8) = 8(x + 4)$,
$x(x + 4)(x - 2) = 8(x + 4)$,
$(x + 4)\big((x(x - 2) - 8\big) = 0$,
$(x + 4)(x^2 - 2x - 8) = 0$,
$(x + 4)(x - 4)(x + 2) = 0$.
$x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.
Ответ: -4; -2; 4.

22. Пусть во второй день изготовлено x деталей, тогда в третий день изготовлено $x \cdot \frac{40}{100} = 0{,}4x$ деталей. По условию во второй день изготовлено

на 480 деталей больше, чем в третий день, отсюда
$x - 0{,}4x = 480,\ 0{,}6x = 480,\ x = 800.$

Во второй день изготовлено 800 деталей, в третий день — $800 - 480 = 320$ деталей, в первый день — $0{,}25 \cdot 320 = 80$ деталей. Всего $800 + 320 + 80 = 1200$ деталей.

Ответ: 1200.

23. $y = \dfrac{5x^2 + 14x - 3}{x^2 + 3x} = \dfrac{5(x^2 + 3x) - x - 3}{x^2 + 3x} = 5 - \dfrac{x + 3}{x^2 + 3x} = 5 - \dfrac{1}{x}$, $x \neq -3$.

Графиком функции $y = 5 - \dfrac{1}{x}$ является гипербола $y = -\dfrac{1}{x}$, смещённая на 5 единиц вверх вдоль оси Oy (см. рис. 33). Для получения графика исходной функции нужно также выколоть из графика точку $\left(-3; 5\frac{1}{3}\right)$.

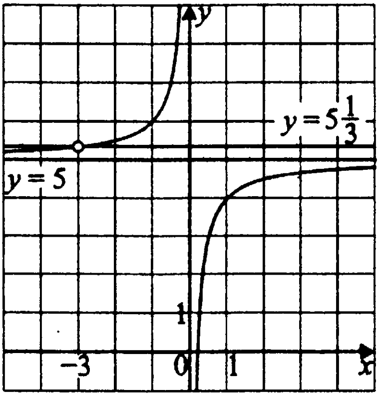


Рис. 33

Прямая $y = a$ не имеет общих точек с построенным графиком при $a = 5$ и $a = 5\frac{1}{3}$.

Ответ: 5; $5\frac{1}{3}$.

24. Пусть $ABCD$ — исходный ромб с углом $BAD = 60°$, $MNPQ$ — прямоугольник, образованный точками касания сторон ромба со вписанной в него окружностью (см. рис. 34). Тогда $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$.

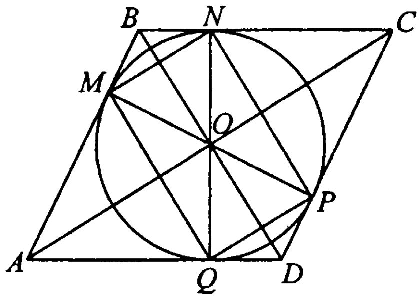


Рис. 34

Тогда по теореме косинусов для $\triangle ABD$
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD =$
$= 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 72 - 36,\ BD = 6$. Отсюда $BO = \frac{BD}{2} = 3$.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, поэтому из $\triangle ABO$ по теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 - BO^2 = 36 - 9 = 27,\ AO = 3\sqrt{3}$.

$S_{ABO} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} AO \cdot BO$, откуда
$OM = \frac{AO \cdot BO}{AB} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Диагонали прямоугольника $MP = NQ = 2MO = 3\sqrt{3}$. Из четырёхугольника $MBNO$ $\angle MON = 360° - 90° - 120° - 90° = 60°$. Диагонали прямоугольника пересекаются под углом $60°$, искомая площадь равна
$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot NQ \cdot \sin \angle MON = \frac{1}{2} \cdot (2OM)^2 \cdot \sin 60° =$
$= \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

25. EF и NK — средние линии треугольников ABC и ADC соответственно (см. рис. 35), поэтому $EF \parallel AC \parallel NK$. Аналогично $EN \parallel FK$. Отсюда по определению $EFKN$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

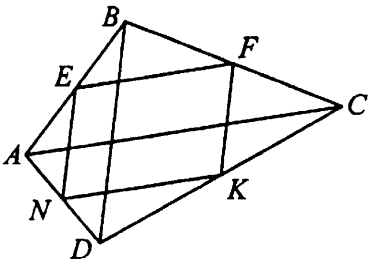


Рис. 35

26. Проведём в трапеции высоту EM (см. рис. 36). Тогда из $\triangle AEM$ и $\triangle DEM$ по теореме Пифагора:
$AM^2 = AE^2 - EM^2 = 3^2 - 2{,}4^2 = 3{,}24;\ AM = 1{,}8;$
$DM^2 = DE^2 - EM^2 = 2{,}6^2 - 2{,}4^2 = 1;\ DM = 1.$

$AD = 1{,}8 + 1 = 2{,}8.$

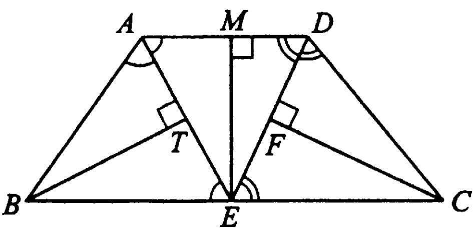


Рис. 36

$\angle DAE = \angle BEA$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AE, поэтому $\triangle BAE$ равнобедренный ($BA = BE$). Его высота BT является и медианой, поэтому $AT = TE = \frac{3}{2} = 1{,}5$. $\triangle BTE \sim \triangle EMA$ ($\angle BTE = \angle EMA = 90°$, $\angle BET = \angle EAM$), откуда $\frac{BE}{AE} = \frac{ET}{AM}$,

$BE = \frac{AE \cdot ET}{AM} = \frac{3 \cdot 1{,}5}{1{,}8} = 2{,}5.$

Аналогично $\triangle DCE$ равнобедренный, CF — его высота и медиана, $EF = 1{,}3$, $EC = \frac{EF \cdot DE}{DM} = \frac{1{,}3 \cdot 2{,}6}{1} = 3{,}38.$

$BC = BE + EC = 2{,}5 + 3{,}38 = 5{,}88.$

Ответ: 2,8; 5,88.

Решение варианта 14

21. Знаменатель дроби первого неравенства равен $\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$. Он определён при $x \neq 0$ и обращается в 0 при $x = -2$.

Следовательно, ОДЗ первого неравенства состоит из всех значений x, кроме $x = 0$, $x = -2$.

При всех значениях x из ОДЗ первого неравенства знаменатель дроби больше нуля, так как является квадратом некоторого числа. Поэтому решениями первого неравенства будут те значения x из ОДЗ, при которых $x^2 - 7x - 8 \leqslant 0$.

Корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 7x - 8$ являются -1 и 8. Учитывая, что его старший коэффициент больше нуля, получаем решение первого неравенства с учётом ОДЗ: $[-1; 0) \cup (0; 8]$.

Решение второго неравенства: $(-\infty; 2)$. Изобразим решения неравенств.

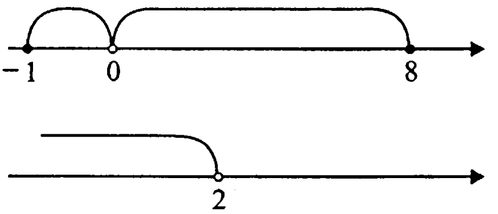


Рис. 37

Из рисунка 37 находим решение системы.

Ответ: $[-1; 0) \cup (0; 2)$.

22. По условию в 1 кг сухого белья содержится 0,08 кг воды. Обозначим через x вес воды в кг, содержащейся в 1 кг белья после стирки.

Так как в 1 кг белья до стирки содержится 0,92 кг сухого вещества, то после стирки из него получится $(0{,}92 + x)$ кг стираного белья. По условию процентное содержание воды в белье после стирки составляет 20%. Следовательно, получаем пропорцию:

$$\begin{array}{lll} 0{,}92 + x & — & 100\% \\ x & — & 20\% \end{array}$$

Отсюда получаем, что $(0{,}92 + x) \cdot 20 = 100x$, $4x = 0{,}92$, $x = 0{,}23$.

Значит, из 1 кг сухого белья получается $0{,}92 + 0{,}23 = 1{,}15$ (кг) стираного белья. Так как после стирки получилось 4,6 кг белья, то сухого заложено $4{,}6 : 1{,}15 = 4$ (кг).

Ответ: 4.

23. Заметим, что $x^2 - 1 > 0$ при любом $x \leqslant -1$, поэтому $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ при $x \leqslant -1$. Отсюда следует, что при $x \leqslant -1$ графиком функции является часть параболы $y = x^2 - 1$, ветви которой направлены вверх. При $x = -1$ её значение равно 0.

При $x > -1$ графиком является часть параболы $y = -x^2 + 3x + 4$, ветви которой направлены вниз, а максимальное значение получится при $x = \frac{3}{2}$.

Значение квадратного трёхчлена $-x^2 + 3x + 4$ при $x = \frac{3}{2}$ равно:

$-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 = 6{,}25$ (см. рис. 38).

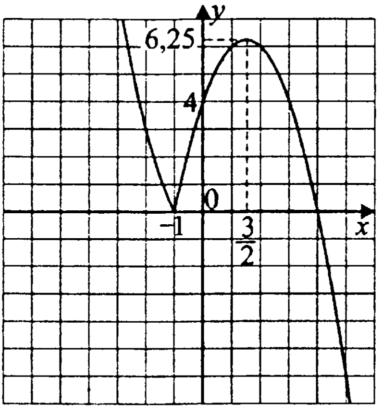


Рис. 38

Из графика видно, что прямая $y = m$, параллельная оси Ox, пересекает график ровно в двух точках при $m = 0$ и $m = 6{,}25$.

Ответ: $m = 0$ и $m = 6{,}25$.

24. По условию $18 = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \sin A = 36 \sin A$.

Отсюда $\sin \angle A = \frac{1}{2}$. Так как угол A является острым, то $\angle A = 30°$.

Находим BC по теореме косинусов.

$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 30° = 144 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 180 - 72\sqrt{3}$,

$BC = \sqrt{180 - 72\sqrt{3}}$.

По теореме синусов $\dfrac{BC}{\sin 30°} = 2R$, $R = BC = \sqrt{180 - 72\sqrt{3}}$.

Ответ: $\sqrt{180 - 72\sqrt{3}}$.

25. Доказательство. Рассмотрим рис. 39.

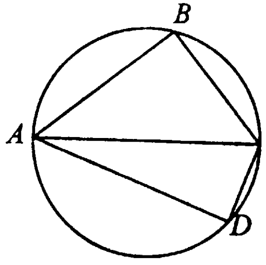


Рис. 39

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B + \frac{1}{2}AD \cdot DC \cdot \sin D.$$

Согласно условию $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot BC + AD \cdot DC)$.

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot (1 - \sin B) + \frac{1}{2}AD \cdot DC \cdot (1 - \sin D) = 0.$$

Так как $1 - \sin B \geqslant 0$ и $1 - \sin D \geqslant 0$, то $1 - \sin B = 0$ и $1 - \sin D = 0$. Поэтому $\sin \beta = 1$, угол B равен $90°$ и $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Что и требовалось доказать.

26. Рассмотрим рис. 40. Через точку O проведём прямую, перпендикулярную BD, и из точек M и N опустим перпендикуляры MK и NT на эту прямую.

По свойству касательных к окружности $\angle OBM = 30°$, а $\angle ODC = 60°$. $\angle BOM = 60°$, поэтому $\angle MOK = 30°$. Значит $MK = \dfrac{R}{2}$, $OK = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично $\angle DON = 30°$, поэтому $\angle ONT = 30°$. Значит, $OT = \dfrac{R}{2}$ и $NT = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

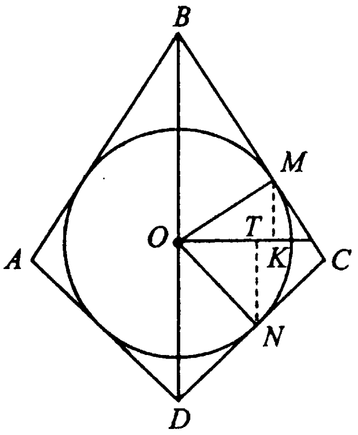


Рис. 40

Заметим, что MN является диагональю прямоугольника со сторонами $NT+KM$ и TK. Поэтому $MN^2 = (\frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2})^2 + (\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2})^2 = 2R^2$, $MN = R\sqrt{2}$.

Ответ: $R\sqrt{2}$.

Решение варианта 15

21. $\begin{cases} \dfrac{x^4-81}{3x^2+8x-3} \geqslant 0, \\ -3x+9 \geqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-9)(x^2+9)}{3(x+3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)} \geqslant 0, \\ -3x \geqslant -9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(x+3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)} \geqslant 0, \\ x \leqslant 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-\dfrac{1}{3}} \geqslant 0, \\ x \neq 3, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов (см. рис. 41), учитывая, что $x \neq -3$.

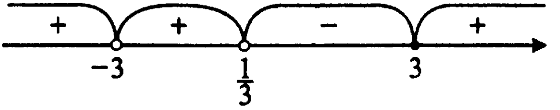


Рис. 41

Его решение: $x \in (-\infty; -3) \cup \left(-3; \frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$. Решением второго неравенства системы является $x \in (-\infty; 3]$. Найдём общее решение системы (см. рис. 42).

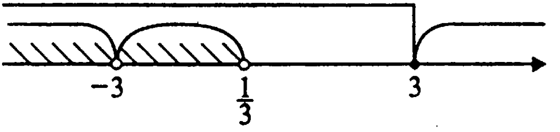


Рис. 42

Общим решением является $x \in (-\infty; -3) \cup \left(-3; \frac{1}{3}\right) \cup \{3\}$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \left(-3; \frac{1}{3}\right) \cup \{3\}$.

22. После перевозки в бананах содержится $100\% - 70\% = 30\%$ сухого вещества, поэтому в 2500 кг бананов после перевозки будет

$2500 \cdot \frac{30}{100} = 750$ (кг) сухого вещества. До перевозки сухое вещество составляет $100\% - 75\% = 25\%$ от массы бананов, то есть $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ от массы бананов. Следовательно, масса бананов до перевозки должна быть $4 \cdot 750 = 3000$ (кг).

Ответ: 3000.

23. График функции $y = \begin{cases} -x + 2, \text{при } x > 0; \\ x^2 + 2x + 1, \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}$ составлен из двух частей. Первая часть является куском прямой $y = -x + 2$ при $x > 0$. Вторая часть является куском параболы $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ (при $x \leqslant 0$), которую можно получить переносом параболы $y = x^2$ на одну единицу влево вдоль оси абсцисс (см. рис. 43).

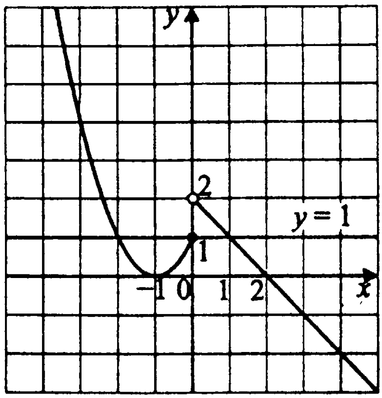


Рис. 43

Видно, что прямая $y = m$, параллельная оси Ox, пересекает график заданной функции в трёх точках при $0 < m \leqslant 1$.

Ответ: $(0; 1]$.

24. Центр O окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, является серединой отрезка KH — серединного перпендикуляра к основаниям трапеции (см. рис. 44). Центр O_1 окружности, описанной около трапеции, лежит на пересечении прямой KH и серединного перпендикуляра PO_1 к стороне AB.

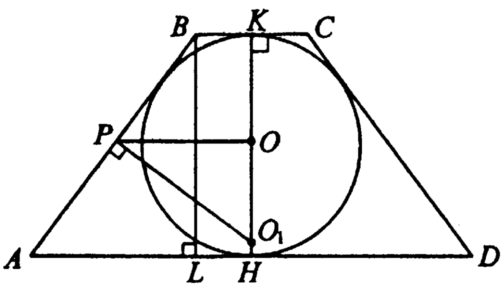


Рис. 44

$$LH = BK = \frac{BC}{2} = 1, \ AH = \frac{AD}{2} = 4, \ AL = AH - LH = 3.$$

Из $\triangle ABL$ по теореме Пифагора получаем
$BL = \sqrt{AB^2 - AL^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$

Так как P — середина отрезка AB, O — середина KH, то PO — средняя линия трапеции $ABKH$ и $PO = \dfrac{BK + AH}{2} = \dfrac{5}{2}$.

$\angle OO_1P = 90^\circ - \angle OPO_1 = \angle BPO = \angle BAL$ (соответственные при $PO \parallel AL$ и секущей AB). Следовательно, прямоугольные треугольники ABL и O_1PO подобны по двум углам и $\frac{OO_1}{AL} = \frac{PO}{BL}$,

$OO_1 = \frac{AL \cdot PO}{BL} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}$.

Ответ: $\frac{15}{8}$.

25. По свойству касательных к окружности, $\angle OBM = \frac{1}{2}\angle ABM = 40^\circ$ и $OM \perp BC$ (см. рис. 45). Следовательно,
$\angle BOM = 180^\circ - \angle OBM - \angle BMO = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$.

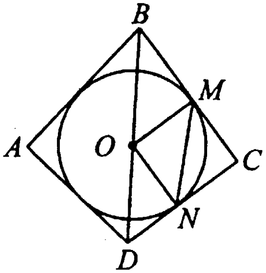


Рис. 45

Аналогично $\angle CDO = \frac{1}{2}\angle CDA = 50^\circ$, $\angle DON = 40^\circ$.

$\angle MON = 180^\circ - \angle BOM - \angle DON = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$. По теореме Пифагора для ΔMON: $MN^2 = MO^2 + NO^2$, что и требовалось доказать.

26. По свойству касательных к окружности $\angle OCN = \frac{1}{2}\angle BCA = 30^\circ$, $CM = CN$, $BM = BK$, $AN = AK$ (см. рис. 46).

$P_{ABC} = CB + BK + AK + AC = CB + BM + NA + AC =$
$= CM + CN = 2CN = 2ON\operatorname{ctg}30^\circ = 2R\operatorname{ctg}30^\circ = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

Ответ: 6.

Решение варианта 16

21. $\begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x^4 - 16} \geqslant 0, \\ -5x + 10 > 0; \end{cases}$

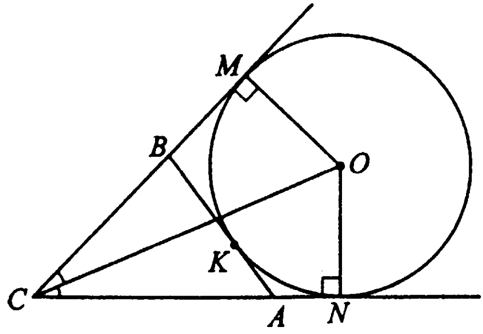


Рис. 46

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{(x^2-4)(x^2+4)} \geqslant 0, \\ -5x > -10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} \geqslant 0, \\ x < 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+\dfrac{3}{2}}{x+2} \geqslant 0, \\ x < 2. \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов (см. рис. 47).

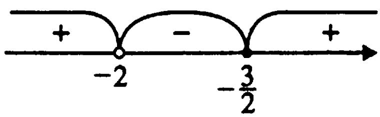


Рис. 47

Его решение: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Решением второго неравенства системы является $x \in (-\infty; 2)$. Найдём общее решение системы (см. рис. 48).

Общим решением является $x \in (-\infty; -2) \cup \left[-\frac{3}{2}; 2\right)$.

Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup [-1{,}5;\ 2)$.

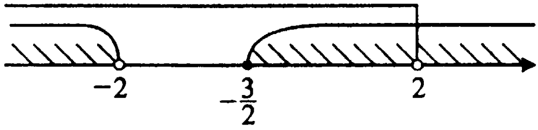


Рис. 48

22. До перевозки в бананах $100\% - 75\% = 25\%$ сухого вещества, поэтому в 3000 кг бананов до перевозки будет $3000 \cdot \frac{25}{100} = 750$ (кг) сухого вещества. После перевозки сухое вещество составляет $100\% - 70\% = 30\%$ от массы бананов, то есть $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ от массы бананов. Следовательно, масса бананов после перевозки будет $\frac{10}{3} \cdot 750 = 2500$ (кг).

Ответ: 2500.

23. График функции $y = \begin{cases} -x+2, \text{при } x < 0; \\ x^2 - 2x + 1, \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$ составлен из двух частей. Первая часть является куском прямой $y = -x + 2$ при $x < 0$. Вторая часть является куском параболы $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ (при $x \geqslant 0$), которую можно получить переносом параболы $y = x^2$ на одну единицу вправо вдоль оси абсцисс (см. рис. 49).

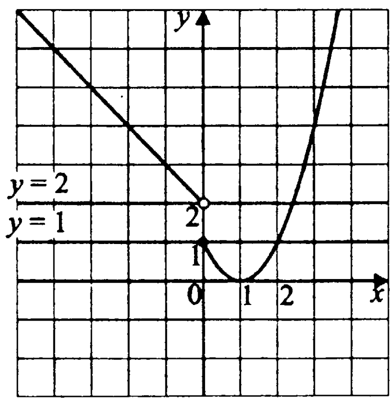


Рис. 49

Видно, что прямая $y = m$, параллельная оси Ox, пересекает график заданной функции ровно в одной точке при $m = 0$ и $1 < m \leqslant 2$.

Ответ: $\{0\} \cup (1; 2]$.

24. Центр O окружности, описанной около равнобедренной трапеции, лежит на отрезке KH — серединном перпендикуляре к основаниям трапеции (см. рис. 50).

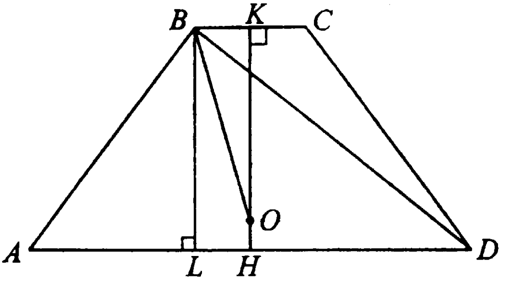


Рис. 50

$$LH = BK = \frac{BC}{2} = 1,\ AH = \frac{AD}{2} = 4,\ AL = AH - LH = 3.$$

Из $\triangle ABL$ по теореме Пифагора получаем
$BL = \sqrt{AB^2 - AL^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$

Из $\triangle ABL$: $\sin\angle A = \dfrac{BL}{AB} = \dfrac{4}{5}$. Из $\triangle LBD$ по теореме Пифагора:
$BD^2 = BL^2 + DL^2 = 4^2 + (4+1)^2 = 16 + 25 = 41$, $BD = \sqrt{41}$.

Пусть радиус окружности, описанной около $ABCD$, равен R. Так как эта окружность описана также около треугольника ABD, то по теореме синусов $2R = \dfrac{BD}{\sin\angle A}$, $R = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{41} : \dfrac{4}{5} = \dfrac{5\sqrt{41}}{8}$.

Из $\triangle BOK$ по теореме Пифагора $OK^2 = BO^2 - BK^2 = \dfrac{25\cdot 41}{64} - 1 = \dfrac{961}{64}$,

$OK = \dfrac{31}{8}$. Следовательно, расстояние от центра окружности до меньшего основания трапеции равно $\dfrac{31}{8}$. Расстояние от центра окружности до большего основания трапеции $OH = KH - OK = 4 - \dfrac{31}{8} = \dfrac{1}{8}$.

Ответ: $\dfrac{31}{8}$; $\dfrac{1}{8}$.

25. По свойству касательных к окружности $OM \perp BM$. Поэтому $\triangle OBM$ прямоугольный с прямым углом BMO (см. рис. 51). Так как катет $OM = R$, а гипотенуза $OB = 2R$, то катет равен половине гипотенузы и лежит против угла 30°. $\angle MBO = 30°$, тогда $\angle BOM = 60°$.

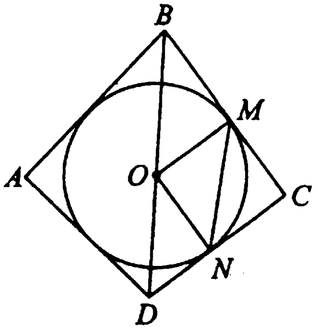


Рис. 51

По теореме Пифагора $DN^2 = OD^2 - NO^2 = \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 - R^2 = \frac{R^2}{3}$, $DN = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Катет DN равен половине гипотенузы DO, поэтому $\angle DON = 30°$.

Отсюда $\angle MON = 180° - \angle BOM - \angle DON = 180° - 60° - 30° = 90°$. По теореме Пифагора для ΔMON: $MN^2 = MO^2 + NO^2$, что и требовалось доказать.

26. Из ΔABC по теореме косинусов:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB =$
$= 12 + 108 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \cos 60° = 120 - 72 \cdot \frac{1}{2} = 84,\ AB = 2\sqrt{21}.$

По свойству касательных к окружности
$\angle OCM = \angle OCN = \frac{1}{2}\angle BCA = 30°,\ CM = CN,\ BM = BK,$
$AN = AK$ (см. рис. 52). Обозначим $x = BM = BK, y = AN = AK$. Тогда $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{21}, \\ x + 2\sqrt{3} = y + 6\sqrt{3}; \end{cases}$
$2x + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{21} + 6\sqrt{3},\ 2x = 2\sqrt{21} + 4\sqrt{3},\ x = \sqrt{21} + 2\sqrt{3}.$

$CM = CB + BM = 2\sqrt{3} + x = 4\sqrt{3} + \sqrt{21}$. Из прямоугольного треугольника OCM: $R = OM = CM \operatorname{tg} 30° = \frac{CM}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 4 + \sqrt{7}$.

Ответ: $4 + \sqrt{7}$.

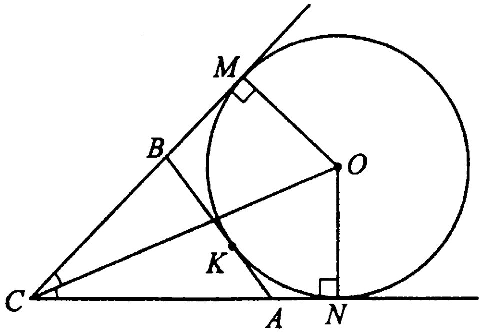


Рис. 52

Решение варианта 18

21. $\frac{5}{x-5} - \frac{1}{(x-5)^2} - 4 = 0$, $x \neq 5$. Пусть $\frac{1}{x-5} = t$. Уравнение примет вид $5t - t^2 - 4 = 0$, $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$, $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Вернёмся к исходной переменной.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{x-5} = 1, \\ \frac{1}{x-5} = 4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x - 5 = 1, \\ 4x - 20 = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ 4x = 21; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ x = 5{,}25. \end{array}\right.$$

Ответ: 5,25; 6.

22. Пусть x тыс. рублей составила премия сотрудникам второго предприятия, тогда $0{,}7x$ тыс. рублей составила премия сотрудникам третьего предприятия, а $0{,}7x \cdot 0{,}3 = 0{,}21x$ тыс. рублей — первого предприятия. По условию премия сотрудникам второго предприятия превышала премию сотрудникам третьего предприятия на 120 тыс. рублей. Составим и решим уравнение $x - 0{,}7x = 120$, $0{,}3x = 120$, $x = 400$.

400 тыс. рублей премия сотрудникам второго предприятия.

$400 \cdot 0{,}7 = 280$ тыс. рублей премия сотрудникам третьего предприятия.

$400 \cdot 0{,}21 = 84$ тыс. рублей премия сотрудникам первого предприятия.

$400 + 280 + 84 = 764$ тыс. рублей составила премия, начисленная всем трём предприятиям.

Ответ: 764.

23. $y = \dfrac{x-4}{x^2-4x} - 1 = \dfrac{x-4}{x(x-4)} - 1 = \dfrac{1}{x} - 1;\ x \neq 4,\ x \neq 0.$

График функции $y = \dfrac{1}{x} - 1$, $x \neq 4$, $x \neq 0$ получен путём сдвига графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ на одну единицу вниз вдоль оси Oy, точка $\left(4; -\dfrac{3}{4}\right)$ выколота (см. рис. 53).

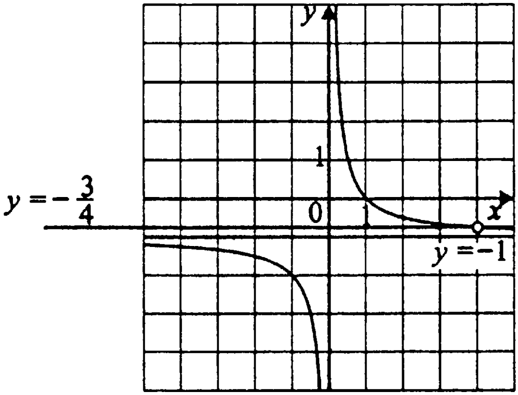


Рис. 53

Прямая $y = k$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $k = -1$ и $k = -\dfrac{3}{4}$.

Ответ: $-1; -\dfrac{3}{4}$.

24. Пусть $BM = x$, тогда $DM = 4 - x$ (см. рис. 54). По свойству пересекающихся хорд имеем $AM \cdot MC = BM \cdot MD$.

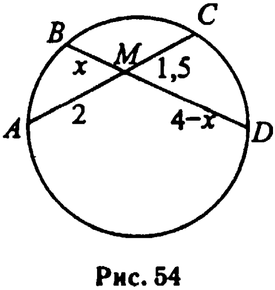


Рис. 54

$2 \cdot 1{,}5 = x(4 - x),$
$x^2 - 4x + 3 = 0,$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1;$
$x_1 = 1, x_2 = 3.$

При $BM = 1$ получаем $DM = 3$, при $BM = 3$ получаем $DM = 1$.

По условию $BM < DM$, значит, $BM = 1$.

Ответ: 1.

25. $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ по первому признаку подобия ($\angle ABO = \angle DCO$ по условию, $\angle AOB = \angle DOC$ как вертикальные) (см. рис. 55).

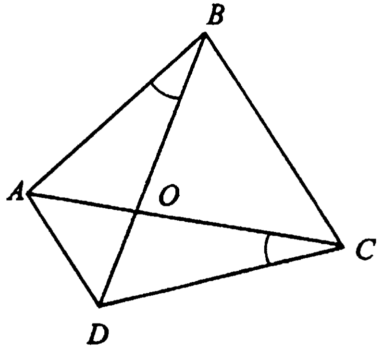


Рис. 55

Из подобия следует $\frac{AO}{BO} = \frac{DO}{CO}$. $\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные, значит, $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ по второму признаку подобия, отсюда $\angle BCO = \angle ADO$, следовательно, $\angle ACB = \angle ADB$, что и требовалось доказать.

26. По условию в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, поэтому $BC + AD = AB + CD = 68 : 2 = 34$ (см. рис. 56).

Проведём $CK \parallel BD$, получим $DBCK$ — параллелограмм и $CK = BD$.

Так как $AC = BD$ как диагонали равнобедренной трапеции, то $AC = CK$ и $\triangle ACK$ — равнобедренный. $AK = AD + DK$, $DK = BC$, $AK = AD + BC = 34$.

$S_{ACK} = \frac{1}{2} AK \cdot CH$, где CH высота $\triangle ACK$. При этом

$\frac{1}{2} AK = \frac{BC + AD}{2}$, а $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH$. Следовательно, $S_{ACK} = 255$.

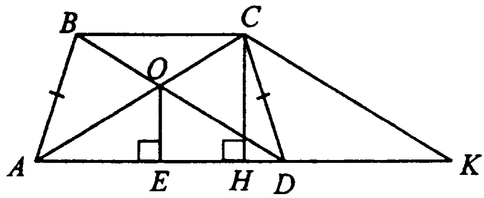


Рис. 56

$CH = \dfrac{2S_{ACK}}{AK} = \dfrac{2 \cdot 255}{34} = 15.$

В прямоугольном треугольнике CHD по теореме Пифагора $DH = \sqrt{CD^2 - CH^2}$, $CD = AB = 34 : 2 = 17.$

$DH = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$

Так как CH — высота равнобедренного треугольника ACK, то CH — медиана, отсюда $AH = HK = 34 : 2 = 17$, $AD = AH + HD =$ $= 17 + 8 = 25.$

$\triangle ACK \sim \triangle AOD$ по первому признаку подобия ($\angle CAK$ — общий, $\angle CKA = \angle ODA$ как соответственные при $BD \parallel CK$ и секущей AK).

Из подобия следует $\dfrac{AK}{AD} = \dfrac{CH}{OE}$, $\dfrac{34}{25} = \dfrac{15}{OE}$, $OE = \dfrac{25 \cdot 15}{34} = 11\dfrac{1}{34}.$

Ответ: $11\dfrac{1}{34}$.

Решение варианта 19

21. $\dfrac{2}{(x-3)^2} + \dfrac{3}{x-3} - 5 = 0,\ x \neq 3.$

$2 + 3(x-3) - 5(x-3)^2 = 0,$

$2 + 3x - 9 - 5x^2 + 30x - 45 = 0,$

$5x^2 - 33x + 52 = 0,$

$x_{1,2} = \dfrac{33 \pm \sqrt{1089 - 1040}}{10} = \dfrac{33 \pm 7}{10},$

$x_1 = 2{,}6,\ x_2 = 4.$

Ответ: 2,6; 4.

22. Пусть x тыс. рублей — стоимость оборудования в заявке третьего цеха, тогда $0{,}6x$ тыс. рублей — стоимость оборудования в заявке первого цеха, а $0{,}6x \cdot 0{,}3 = 0{,}18x$ тыс. рублей в заявке второго цеха. Зная, что стоимость оборудования в заявке третьего цеха превышает стоимость оборудования в заявке второго на 492 тыс. рублей, составим и решим уравнение.

$x - 0{,}18x = 492,\ 0{,}82x = 492,\ x = 600.$

600 тыс. рублей — стоимость оборудования в заявке третьего цеха.

1) $600 \cdot 0{,}6 = 360$ (тыс. руб.) — стоимость оборудования в заявке первого цеха.

2) $360 \cdot 0{,}3 = 108$ (тыс. руб.) — стоимость оборудования в заявке второго цеха.

3) $600+360+108 = 1068$ (тыс. руб.) — общая стоимость оборудования в заявках всех трёх цехов.

Ответ: 1068.

23. $y = 1 + \dfrac{x-2}{x^2-2x} = 1 + \dfrac{x-2}{x(x-2)} = 1 + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 2$. График функции $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 2$ получается путём сдвига графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ на 1 единицу вверх вдоль оси Oy, точка $(2; 1{,}5)$ выколота (см. рис. 57).

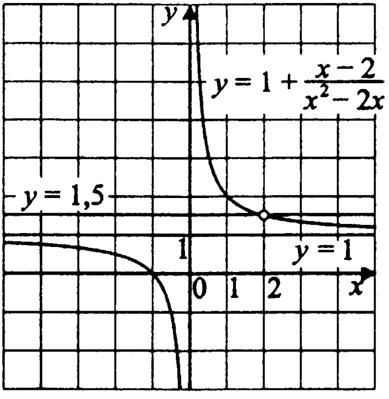


Рис. 57

Прямая $y = a$ не имеет с графиком общих точек при $a = 1$ и $a = 1{,}5$.

Ответ: 1; 1,5.

24. Обозначим $AF = x$, тогда $BF = 11 - x$ (см. рис. 58). По свойству хорд имеем $AF \cdot BF = CF \cdot DF$. $AF > BF$, значит, $AF > \dfrac{AB}{2} = 5{,}5$.

$x(11 - x) = 4 \cdot 6$,

$x^2 - 11x + 24 = 0$,

$x_1 = 3, x_2 = 8$.

$AF > 5{,}5$, следовательно, $AF = 8$.

Ответ: 8.

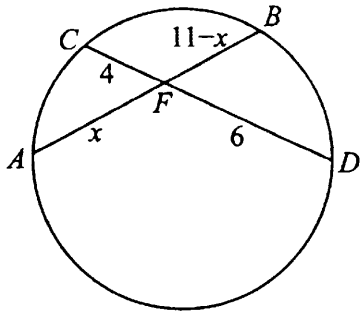


Рис. 58

25. Проведём $MF \parallel EP$ (см. рис. 59), по условию $MN \parallel KP$. В четырёхугольнике $MNPF$ противоположные стороны попарно параллельны, значит, $MNPF$ — параллелограмм, отсюда $MF = NP$.

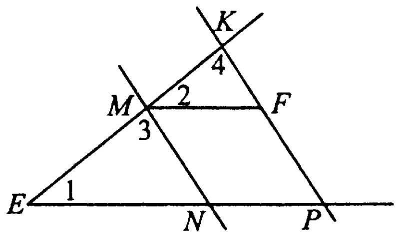


Рис. 59

$\triangle MEN \sim \triangle KMF$ по первому признаку подобия ($\angle 3 = \angle 4$ как соответственные при $MN \parallel KP$ и секущей EK, $\angle 1 = \angle 2$ как соответственные при $EP \parallel MF$ и секущей EK). Из подобия следует $\dfrac{EM}{MK} = \dfrac{EN}{MF}$. Так как $NP = MF$, то $\dfrac{EM}{MK} = \dfrac{EN}{NP}$, что и требовалось доказать.

26. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции, $\angle CAD = \angle 1$, $\angle ADB = \angle 2$, $\angle ACB = \angle 3$, $\angle CBD = \angle 4$. Через точку O проведём высоту трапеции EF (см. рис. 60).

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot EF, \quad 120 = \frac{9 + 21}{2} \cdot EF, \quad EF = 8.$$

$\triangle ABD = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$ и $\angle BAD = \angle ADC$, так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, сторона AD общая). Отсюда $\angle 1 = \angle 2$, $\triangle AOD$ равнобедренный по признаку рав-

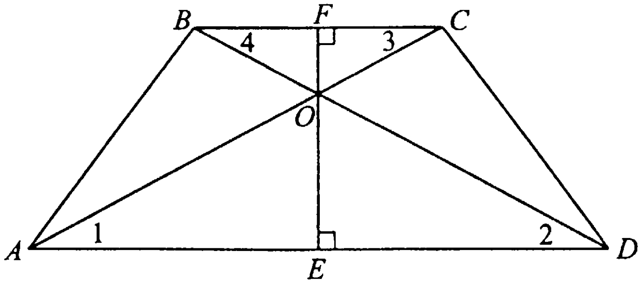


Рис. 60

нобедренного треугольника. Высота OE является также медианой равнобедренного $\triangle AOD$, $AE = DE = \frac{21}{2} = 10{,}5$.

$\angle 1 = \angle 3$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC, аналогично $\angle 2 = \angle 4$. Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 4$ и $\triangle BOC$ — равнобедренный, высота OF — медиана. Следовательно, $BF = CF = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

$\triangle AOE \sim \triangle COF$ (так как $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle AEO = \angle CFO = 90°$). Из подобия следует, что $\frac{AE}{FC} = \frac{OE}{OF}$, $\frac{10{,}5}{4{,}5} = \frac{8 - OF}{OF}$, $7OF = 3(8 - OF)$, $10OF = 24$, $OF = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

Решение варианта 20

21. $\frac{7}{x-2} - \frac{5}{(x-2)^2} - 2 = 0.$

Пусть $\frac{1}{x-2} = t$. Уравнение примет вид $7t - 5t^2 - 2 = 0$,

$5t^2 - 7t + 2 = 0$, $t_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{10}$, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{2}{5}$.

Вернёмся к исходной переменной.

1) $\frac{1}{x-2} = \frac{2}{5}$, $2x - 4 = 5$, $x = 4{,}5$.

2) $\frac{1}{x-2} = 1$, $x - 2 = 1$, $x = 3$.

Ответ: 3; 4,5.

22. Пусть x тыс. рублей составила премия сотрудникам второго цеха, тогда $0{,}65x$ тыс. рублей составила премия сотрудникам третьего цеха,

а $0{,}65x \cdot 0{,}4 = 0{,}26x$ тыс. рублей — премия сотрудникам первого цеха. Зная, что премия сотрудникам второго цеха превышала премию сотрудникам третьего на 149,8 тыс. рублей, составим и решим уравнение:
$x - 0{,}65x = 149{,}8,\ \ 0{,}35x = 149{,}8,\ \ x = 428.$

В сумме всем трём цехам в качестве премии начислено
$x + 0{,}65x + 0{,}26x = 1{,}91x = 1{,}91 \cdot 428 = 817{,}48$ (тыс. рублей).

Ответ: 817,48.

23. $y = 1 - \dfrac{x+2}{x^2+2x} = 1 - \dfrac{x+2}{x(x+2)} = 1 - \dfrac{1}{x},\ x \neq -2$. График функции $y = 1 - \dfrac{1}{x}$, $x \neq -2$ получается путём сдвига графика функции $y = -\dfrac{1}{x}$ на 1 единицу вверх вдоль оси Oy, точка $(-2; 1{,}5)$ выколота (см. рис. 61).

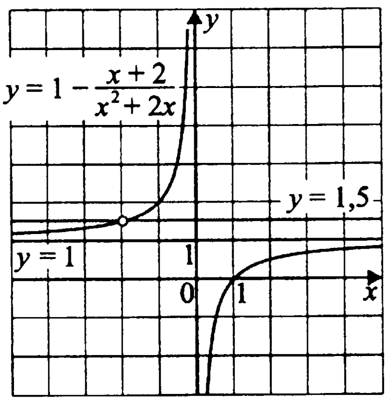


Рис. 61

Прямая $y = a$ не имеет с графиком общих точек при $a = 1$ и $a = 1{,}5$.

Ответ: 1; 1,5.

24. Обозначим $PE = x$, тогда $KE = 12 - x$ (см. рис. 62). По свойству хорд имеем $PE \cdot KE = ME \cdot NE$.

$x(12 - x) = 4 \cdot 5,$

$x^2 - 12x + 20 = 0,$

$x_1 = 10, x_2 = 2.$

При $PE = 10$ получим $KE = 2$. При $PE = 2$ получим $KE = 10$.

По условию $PE < KE$, следовательно, $PE = 2$.

Ответ: 2.

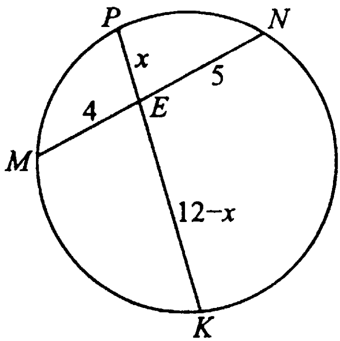


Рис. 62

25. Проведём $BH \perp DC$ (см. рис. 63).

$S_{KBC} = \frac{1}{2}KC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BH = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

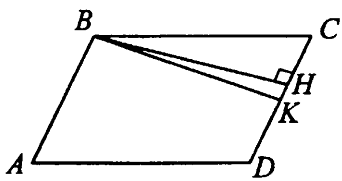


Рис. 63

26. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции, $\angle CAD = \angle 1$, $\angle ADB = \angle 2$. Через точку O проведём высоту трапеции KP (см. рис. 64).

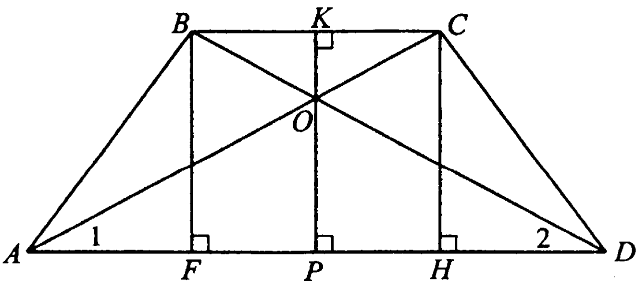


Рис. 64

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot KP, \quad 96 = \frac{8 + 24}{2} \cdot KP, \quad KP = 6.$$

$\triangle ABD = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$ и $\angle BAD = \angle ADC$, так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, сторона AD общая). Отсюда $\angle 1 = \angle 2$, $\triangle AOD$ равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Высота OP является также медианой равнобедренного $\triangle AOD$, $AP = DP = \dfrac{24}{2} = 12$.

Проведём $CH \parallel KP$ и $BF \parallel KP$, тогда $BF \perp AD$, $BF \perp BC$, $CH \perp AD$, $CH \perp BC$. $FBCH$ — прямоугольник и $FH = BC = 8$. Прямоугольные треугольники BFA и CHD равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$ и $\angle BAD = \angle ADC$), поэтому

$$AF = DH = \frac{AD - FH}{2} = \frac{24 - 8}{2} = 8. \ AH = AF + FH = 8 + 8 = 16.$$

$\triangle ACH \sim \triangle AOP$ по двум углам ($\angle AHC = \angle APO = 90°$, $\angle A$ общий). Из подобия следует, что $\dfrac{CH}{OP} = \dfrac{AH}{AP}$,

$$OP = \frac{CH \cdot AP}{AH} = \frac{6 \cdot 12}{16} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

Решение варианта 22

21. Разложим трёхчлен $x^2 + x - 12$ на линейные множители.

Его корнями по формулам Виета являются числа 3 и -4. Поэтому $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$.

Уравнение принимает вид:

$x(x^2 + x - 12) = x(x + 4)(x - 3)$.

$x(x + 4)(x - 3) = 5(x - 3)$, $x(x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) = 0$,

$(x - 3)(x(x + 4) - 5) = 0$, $(x - 3)(x^2 + 4x - 5) = 0$,

$(x - 3)(x + 5)(x - 1) = 0$, $x_1 = 3, x_2 = -5, x_3 = 1$.

Ответ: 3; -5; 1.

22. Пусть S км — расстояние от Ростова-на-Дону до Архангельска, v_1 км/ч — скорость первого поезда, v_2 км/ч — скорость второго поезда. Тогда, согласно условию, получаем (заметим, что 19 ч 33 мин $= 19\dfrac{11}{20}$ ч):

$$\begin{cases} \dfrac{S}{v_1} + \dfrac{S}{v_2} = 80, \\ \dfrac{S}{v_1 + v_2} = 19\dfrac{11}{20}. \end{cases}$$

Пусть $\dfrac{S}{v_1} = a$ и $\dfrac{S}{v_2} = b$, тогда $\begin{cases} a+b=80, \\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{391}{20}. \end{cases}$

$$\begin{cases} a+b=80, \\ \dfrac{1}{\dfrac{a+b}{ab}} = \dfrac{391}{20}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=80, \\ \dfrac{ab}{80} = \dfrac{391}{20}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=80, \\ ab=1564. \end{cases}$$

$a = 80 - b$, $(80-b)b = 1564$, $80b - b^2 = 1564$, $b^2 - 80b + 1564 = 0$.

$b_{1,2} = 40 \pm \sqrt{1600-1564} = 40 \pm 6$.

$b_1 = 34$; $b_2 = 46$. Тогда $a_1 = 46$, $a_2 = 34$.

Ответ: 34; 46.

23. а) Заметим, что $y = -x$ при $x < -1$.

График указанной функции состоит из частей графиков некоторых трёх функций: прямой $y = -x$, при $x < -1$; параболы $y = 2x^2 - 1$, ветви которой направлены вверх, а вершина расположена в точке $(0; -1)$, при $|x| < 1$; гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$, при $x > 1$ (см. рис. 65).

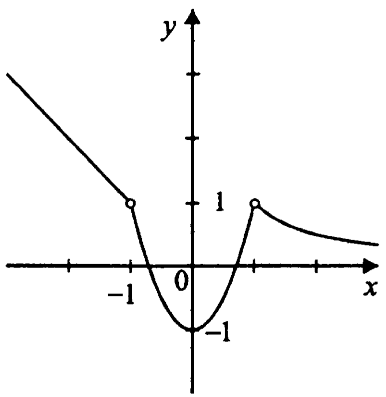


Рис. 65

Точка $(-1; 1)$ не принадлежит графику. Она является конечной точкой графиков функций $y = -x$ и $y = 2x^2 - 1$. Действительно, точка $(-1; 1)$ такова, так как $|-1| = 1$ и $2(-1)^2 - 1 = 1$. Аналогично точка $(1; 1)$ не принадлежит графику заданной функции.

б) Из графика видно, что прямая $y = c$, которая параллельна оси Ox, пересекает график заданной функции в трёх точках при любом c, заключённом в промежутке $(0; 1)$.

Ответ: б) $(0; 1)$.

24. Рассмотрим рис. 66. По условию AB является высотой трапеции. Обозначим её через h. Через точку C проведём прямую, параллельную диагонали BD. Точку пересечения с прямой AD обозначим через K. Тогда $DK = BC = 4$, $AK = AD + DK = 29$, $BD = CK$. Угол между диагоналями равен $\angle ACK = 90°$.

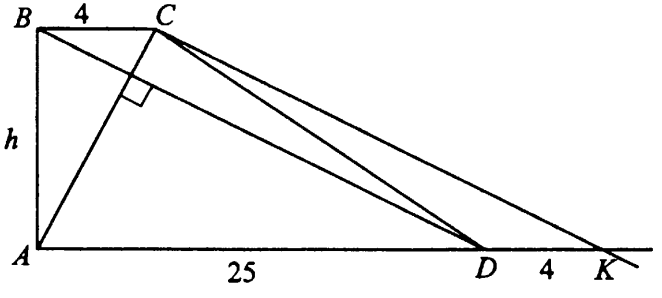


Рис. 66

В прямоугольном $\triangle ACB : AC^2 = 16 + h^2$, в прямоугольном $\triangle ABD$ $BD^2 = 625 + h^2$.

Поэтому, в прямоугольном $\triangle ACK$: $AC^2 + CK^2 = AK^2$, $AC^2 + BD^2 = AK^2$, $16 + h^2 + 625 + h^2 = 841$, $2h^2 = 200$, $h^2 = 100$, $h = 10$.

Ответ: 10.

25. Рассмотрим рис. 67.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда по условию $\angle CAD = \alpha$. Получаем, что $\angle A = 2\alpha$. Но углы при нижнем основании равнобедренной трапеции равны, поэтому $\angle D = 2\alpha$.

По свойствам параллельных прямых AD и BC получаем, что $\angle BCA = \angle CAD = \alpha$. Поэтому $\angle CAB = \angle BCA = \alpha$. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный. Тогда $AB = BC$.

$\angle CBD = \angle CDB = \alpha$. $\angle CBD = \angle BDA = \alpha$. То есть BD — биссектриса $\angle CDA$, что и требовалось доказать.

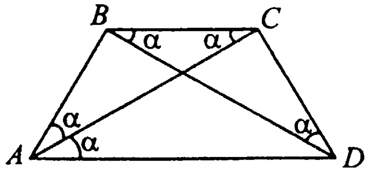


Рис. 67

26. Обозначим: $AC = b$, $CB = a$ и $AB = c$. Так как центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, то гипотенуза $AB = 5$.

Центр окружности, расположенной внутри угла ACB, касающийся гипотенузы и продолжения катетов, является точкой пересечения биссектрис углов, смежных с углами A и B треугольника ABC.

Обозначим через O центр этой окружности, а через OT, OM и OK её радиусы с концами в точках касания с катетами AC, BC и гипотенузой AB соответственно.

Рассмотрим рисунок 68.

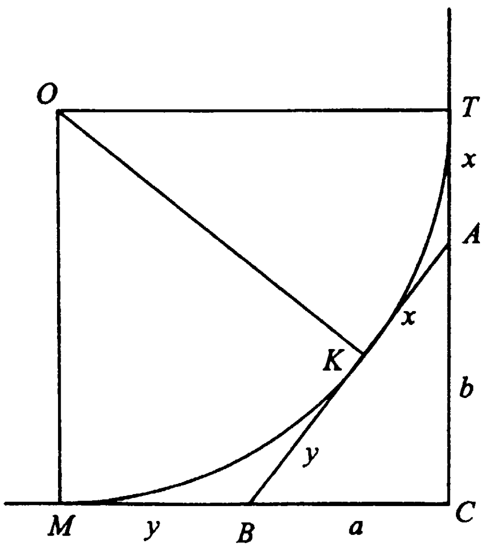


Рис. 68

По условию $OM = OK = OT = 6$, $MOTS$ — квадрат со стороной 6.

Пусть $AT = x$, $MB = y$. Тогда по свойствам касательных к окружности $MB = BK = y$, $KA = AT = x$.

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} a^2+b^2=25, \\ x+y=5, \\ a+y=6, \\ b+x=6; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2=25, \\ y=5-x, \\ a=1+x, \\ b=6-x. \end{cases}$$

$(1+x)^2+(6-x)^2=25, 2x^2-10x+12=0,$

$x^2-5x+6=0.$

$x_1=2, y_1=3, a=3, b=4;$

$x_2=3, y_2=2, a=4, b=3.$

Таким образом, получаем, что стороны треугольника ABC равны 3, 4 и 5.

Ответ: 3, 4, 5.

Решение варианта 23

21. $(3x-7)^2(x+5)=(3x-7)(x+5)^2,$

$(3x-7)^2(x+5)-(3x-7)(x+5)^2=0,$

$(3x-7)(x+5)\big((3x-7)-(x+5)\big)=0,$

$(3x-7)(x+5)(2x-12)=0,$

$x_1=\frac{7}{3}, x_2=-5, x_3=6.$

Ответ: -5; 6; $\frac{7}{3}$.

22. Перейдём в систему координат, связанную с велосипедистом. Тогда велосипедист будет неподвижен, а поезд проедет мимо него за 0,5 минуты с относительной скоростью $75-12=63$ км/ч $=1050$ м/мин. Пусть длина поезда x м, тогда $x=0{,}5\cdot 1050, x=525$.

Ответ: 525 м.

23. Построим график функции $y=\begin{cases} 3-x, \text{ если } x<-2, \\ 0{,}5x+4{,}5, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 4, \\ 12{,}5-1{,}5x, \text{ если } x>4. \end{cases}$

На каждом заданном промежутке $x<-2$, $-2\leqslant x\leqslant 4$ и $x>4$ функция представляет собой часть прямой $y=3-x$, $y=0{,}5x+4{,}5$ и $y=12{,}5-1{,}5x$ соответственно.

По рисунку 69 видно, что прямая $y=c$ имеет с этим графиком ровно 2 общие точки при значениях параметра $c=6{,}5$ и $3{,}5\leqslant c\leqslant 5$.

Ответ: $[3{,}5; 5]\cup\{6{,}5\}$.

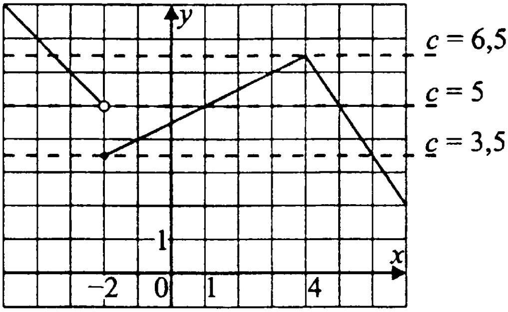


Рис. 69

24. Обозначим $R = 9$ радиус окружности, описанной около треугольника PKN (см. рис. 70). По теореме синусов для треугольника PKN

$$2R = \frac{KN}{\sin \angle KPN},$$
$$\angle KPN = 180^\circ - \angle K - \angle N = 180^\circ - 74^\circ - 61^\circ = 45^\circ,$$
$$KN = 2R \sin \angle P = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

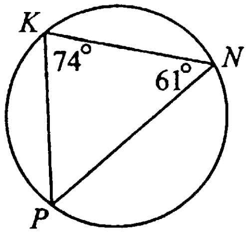


Рис. 70

Ответ: $9\sqrt{2}$.

25. Пусть в трапеции $ABCD$ точки M и N — середины оснований BC и AD (см. рис. 71). Обозначим h — расстояние между прямыми BC и AD.

Так как $BM = MC$ и $AN = ND$, то площади трапеций $ABMN$ и $NMCD$ равны:

$$S_{ABMN} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (BM + AN) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (MC + ND) = S_{NMCD}.$$

26. Пусть в треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE, CF, и пусть биссектриса AD делится точкой I пересечения биссектрис в отношении $AI : ID = 18 : 7$, а $BC = 21$ (см. рис. 72).

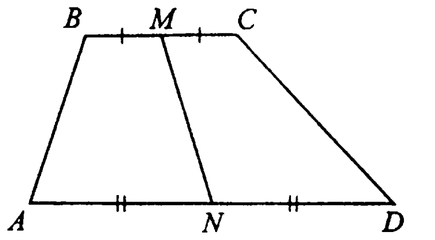


Рис. 71

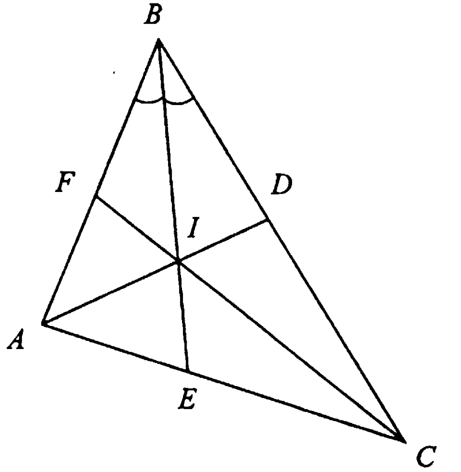


Рис. 72

BI — биссектриса треугольника ABD, поэтому

$$AB : BD = AI : ID = 18 : 7, AB = \frac{18}{7}BD.$$

CI — биссектриса треугольника ADC, поэтому

$$AC : DC = AI : ID = 18 : 7, AC = \frac{18}{7}DC.$$

Периметр треугольника ABC:

$$P = AB + AC + BC = \frac{18}{7}(BD + DC) + BC = \frac{18 \cdot 21}{7} + 21 = 75.$$

Ответ: 75.

Решение варианта 24

21. $(x-4)^2(x+10) = 15(x-4),$
$(x-4)^2(x+10) - 15(x-4) = 0,$
$(x-4)\big((x-4)(x+10) - 15\big),$

$(x-4)(x^2+6x-55)=0,$

1) $(x-4)=0, x_1=4,$

2) $(x^2+6x-55)=0,\ x_2=5,\ x_3=-11.$

Ответ: 5; 4; −11.

22. Перейдём в систему координат, связанную с товарным поездом. Тогда товарный поезд будет неподвижен, а электричка проедет мимо него за 4,5 минуты с относительной скоростью $55-25=30$ км/ч $=500$ м/мин. Пусть длина электрички x м, тогда $4{,}5\cdot 500 = x+1600, x=650$.

Ответ: 650 м.

23. Построим график функции $y=\begin{cases} x-3, \text{ если } x<-2,\\ -2{,}5x-5{,}5, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 1{,}5x-5{,}5, \text{ если } x>0.\end{cases}$

На каждом заданном промежутке $x<-2, -2\leqslant x\leqslant 0$ и $x>0$ функция представляет собой часть прямой $y=x-3, y=-2,5x-5,5$ и $y=1,5x-5,5$ соответственно.

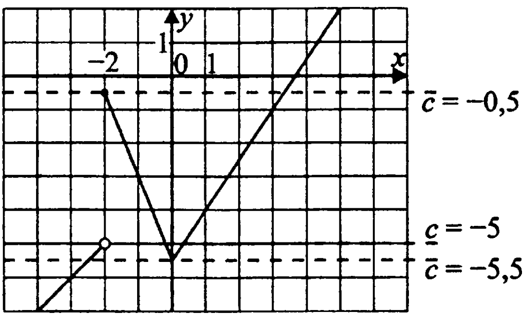


Рис. 73

По рисунку 73 видно, что прямая $y=c$ имеет с этим графиком ровно 2 общие точки при значениях параметра $c=-5{,}5$ и $-5\leqslant c\leqslant -0{,}5$.

Ответ: $\{-5,5\}\cup[-5;-0{,}5]$.

24. Обозначим треугольник ABC, и пусть длины дуг AB, BC, CA относятся как 5 : 7 : 8 (см. рис. 74).

Градусные меры дуг окружности относятся так же, как длины этих дуг, поэтому градусные меры дуг AB, BC и CA относятся как 5 : 7 : 8. Обозначим градусную меру дуги AB за $5x$. Тогда градусные меры дуг BC и CA равны $7x$ и $8x$. Так как три дуги вместе составляют полную окружность, то $5x+7x+8x=360°, x=18°$.

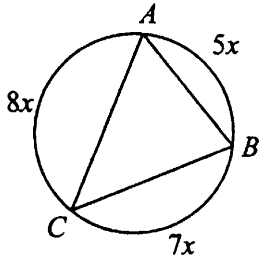


Рис. 74

Углы треугольника ABC являются вписанными и опираются на дуги AB, BC и CA, поэтому они равны половине градусных мер этих дуг:

$$\angle C = \frac{5x}{2}, \ \ \angle A = 3{,}5x, \ \ \angle B = 4x.$$

Наименьшая сторона треугольника лежит напротив наименьшего угла C, значит, $AB = 12$.

По теореме синусов:

$$2R = \frac{AB}{\sin \angle C},$$

где R радиус описанной окружности треугольника ABC. Поэтому

$$R = \frac{12}{2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)} = \frac{6}{\sin 45^\circ} = 6\sqrt{2}.$$

Ответ: $6\sqrt{2}$.

25. Обозначим основания трапеции $LM = a$, $KN = b$, высоту трапеции h, и проведём из точки X высоты XT и XH к прямым LM и KN соответственно (см. рис. 75).

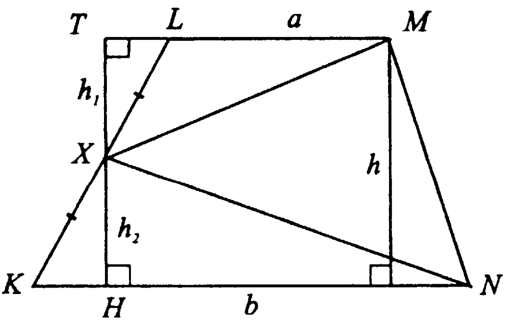


Рис. 75

Прямоугольные треугольники XLT и XHK равны по гипотенузе и острому углу X, поэтому $XT = XH = \frac{h}{2}$. Значит:

$$S_{XLM} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot LM = \frac{ah}{4},$$

$$S_{XKN} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot KN = \frac{bh}{4}.$$

Площадь трапеции равна

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (LM + KN) = \frac{(a+b)h}{2} = 2(S_{XLM} + S_{XKN}).$$

Значит,

$$S_{XMN} = S_{KLMN} - (S_{XLM} + S_{XKN}) = S_{KLMN} - \frac{S_{KLMN}}{2} = \frac{S_{KLMN}}{2}.$$

26. Проведём через точку Y прямую YT, параллельную PX и пересекающую QR в точке T. Обозначим $QX = 7x$ (см. рис. 76).

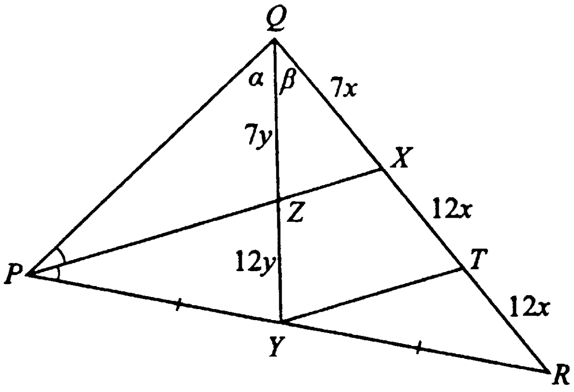


Рис. 76

По свойству биссектрисы, $QX : XR = PQ : PR = 7 : 24$, $XR = 24x$. YT является средней линией треугольника PRX, поскольку проходит через середину стороны PR и параллельна PX. Поэтому $XT = TR = 12x$. В силу параллельности прямых XZ и TY, $QZ : ZY = QX : XT = 7 : 12$, обозначим $QZ = 7y$, тогда $ZY = 12y$.

Обозначим $\alpha = \angle PQY$ и $\beta = \angle RQY$.

$$S_{PQY} = \frac{1}{2} PQ \cdot QY \sin\alpha = \frac{1}{2} PQ \cdot 19y \sin\alpha,$$

$S_{PQZ} = \frac{1}{2}PQ \cdot QZ \sin\alpha = \frac{1}{2}PQ \cdot 7y \sin\alpha = \frac{7}{19}S_{PQY}$,

$S_{YQR} = \frac{1}{2}QR \cdot QY \sin\beta = \frac{1}{2}31x \cdot 19y \sin\beta$,

$S_{ZQX} = \frac{1}{2}QZ \cdot QX \sin\beta = \frac{1}{2}7y \cdot 7x \sin\beta = \frac{49}{589}S_{YQR}$,

$S_{YZXR} = S_{YQR} - S_{ZQX} = \frac{540}{589}S_{YQR}$.

QY является медианой треугольника PQR, поэтому $S_{PQY} = S_{YQR}$.

$\frac{S_{PQZ}}{S_{YZXR}} = \frac{7 \cdot 589}{19 \cdot 540} = \frac{217}{540}$.

Ответ: 217 : 540.

Решение варианта 26

21. $\frac{98^{m+4}}{2^{m+3} \cdot 7^{2m+7}} = \frac{2^{m+4} \cdot 49^{m+4}}{2^{m+3} \cdot 7^{2m+7}} == \frac{2^{m+4} \cdot 7^{2m+8}}{2^{m+3} \cdot 7^{2m+7}} = 2 \cdot 7 = 14.$

Ответ: 14.

22. Пусть x км/ч — скорость автомобилиста, тогда $(x - 48)$ км/ч — скорость велосипедиста (отсюда $x > 48$). Автомобилист потратил на путь из пункта A в пункт B $\frac{112}{x}$ ч, а велосипедист — $\frac{112}{x-48}$ ч. Так как велосипедист был в пути на 7 ч 28 мин $= 7\frac{7}{15}$ ч дольше, то можно составить уравнение $\frac{112}{x-48} - \frac{112}{x} = \frac{112}{15}$.

Решим его:

$\frac{1}{x-48} - \frac{1}{x} = \frac{1}{15}$, $15 \cdot x - 15(x - 48) = x(x - 48)$, $15 \cdot 48 = x(x - 48)$,
$x^2 - 48x - 720 = 0$, $x_{1,2} = 24 \pm \sqrt{576 + 720} = 24 \pm \sqrt{1296} = 24 \pm 36$.
Т. к. $x > 48$, то $x = 24 + 36 = 60$.

Ответ: 60.

23. Найдём нули выражений, стоящих под знаком модуля: $2x + 4 = 0$, $x = -2$, $2x - 3 = 0$, $x = 1{,}5$.

Раскроем знаки модуля на промежутках $x \leqslant -2$, $-2 < x \leqslant 1{,}5$, $x > 1{,}5$:

$$|2x+4|-|2x-3| = \begin{cases} -(2x+4)+(2x-3), \text{если } x \leqslant -2, \\ (2x+4)+(2x-3), \text{если } -2 < x \leqslant 1{,}5, \\ (2x+4)-(2x-3), \text{если } x > 1{,}5; \end{cases}$$

раскрыв скобки и выполнив тождественные преобразования, получим,

$$y = \begin{cases} -7, \ x \leqslant -2, \\ 4x+1, \ -2 < x \leqslant 1{,}5, \\ 7, \ x > 1{,}5 \end{cases} \quad (\text{см. рис. } 77).$$

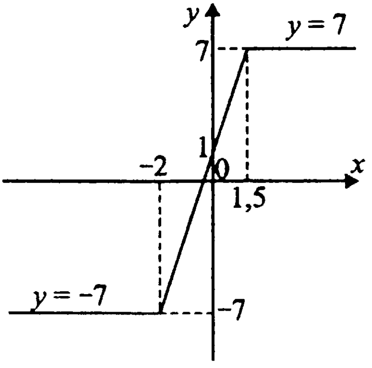


Рис. 77

Прямая $y = b$ имеет с графиком ровно одну общую точку, когда $-7 < b < 7$ (см. рис. 77).

Ответ: $(-7; 7)$.

24. Проведём $DH \perp AB$, $BK \perp CD$ (см. рис. 78). Из прямоугольного треугольника BKC найдём КС по теореме Пифагора: $KC = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. Из прямоугольного треугольника AHD найдём АН по теореме Пифагора: $AH = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$. Т.к. $AB > 10$, то $DC = 10$. $HB = DK = DC - KC$. $HB = 10 - 7 = 3$. Таким образом, $AB = AH + HB = 32 + 3 = 35$. Найдём периметр P трапеции $ABCD$: $P = AB + BC + CD + AD = 35 + 25 + 10 + 40 = 110$.

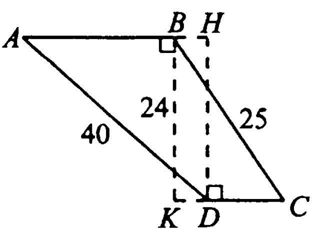


Рис. 78

Ответ: 110.

25. По условию окружность вписана в трапецию, значит, O — точка пересечения биссектрис BO и AO (см. рис. 79).

Пусть $\angle OAB = \alpha$, $\angle OBA = \beta$. $\angle A + \angle B = 180^\circ$ как углы, прилежащие к боковой стороне трапеции, тогда $2\angle\alpha + 2\angle\beta = 180^\circ$, $\angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ$. Получили, что сумма двух углов $\triangle AOB$ равна 90°, значит, $\angle AOB = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

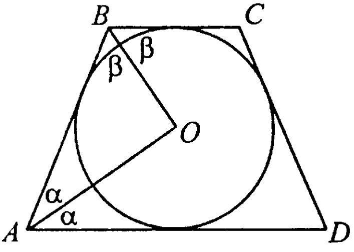


Рис. 79

26. Прямая, параллельная основанию AC, отсекает $\triangle BMN$, подобный $\triangle ABC$ по первому признаку подобия ($\angle B$ — общий, $\angle BMN = \angle BAC$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей AB).

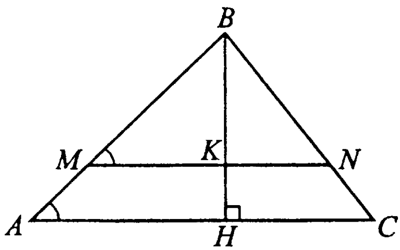


Рис. 80

По условию $\dfrac{BK}{KH} = \dfrac{2}{1}$, следовательно, $BK : BH = 2 : 3$. Тогда $\dfrac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{4}{9}$ (см. рис. 80).

$$S_{BMN} = \frac{4}{9} S_{ABC}.$$

$$S_{MNCA} = S_{ABC} - S_{BMN} = S_{ABC} - \frac{4}{9} S_{ABC} = \frac{5}{9} S_{ABC}.$$

Площадь треугольника ABC найдём по формуле Герона.

$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - BC) \cdot (p - AC)},$$

где $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2}$.

$$p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21,\ S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84.$$

$$S_{MNCA} = 84 \cdot \frac{5}{9} = 46\frac{2}{3}.$$

Ответ: $46\frac{2}{3}$.

Решение варианта 27

21. $\dfrac{12^{n-5}}{3^{n-6} \cdot 2^{2n-9}} = \dfrac{(3 \cdot 2^2)^{n-5}}{3^{n-6} \cdot 2^{2n-9}} = \dfrac{3^{n-5} \cdot 2^{2n-10}}{3^{n-6} \cdot 2^{2n-9}} = 3 \cdot 2^{-1} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5.$

Ответ: 1,5.

22. Пусть ученик изготавливает x деталей в час, а мастер $(x+6)$ деталей в час. Ученик изготавливает 80 деталей за $\dfrac{80}{x}$ часов, а мастер изготавливает 40 деталей за $\dfrac{40}{x+6}$ часов. Зная, что ученик тратит на 2 часа больше на изготовление 80 деталей, чем мастер на изготовление 40 деталей, составим и решим уравнение.

$\dfrac{80}{x} - \dfrac{40}{x+6} = 2,$

$80(x+6) - 40x = 2x(x+6),$

$2x^2 - 28x - 480 = 0,$

$x^2 - 14x - 240 = 0,$

$x_1 = 24,\ x_2 = -10$. Так как $x > 0$, то $x = 24$.

Таким образом, ученик изготавливает 24 детали в час, а мастер — $24 + 6 = 30$ деталей в час. Работая вместе, они изготавливают в час $24 + 30 = 54$ детали, делая 270 деталей за $\dfrac{270}{54} = 5$ часов.

Ответ: 5.

23. Преобразуем выражение $\dfrac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4)}{x^2 - 4x + 4}$.

$$\frac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4)}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)(x-3)(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = (x-3)(x+2),$$

$x \neq 2$.

Графиком функции $y = (x-3)(x+2)$, $x \neq 2$ является парабола с выколотой точкой $(2; -4)$ (см. рис. 81). Вершина параболы находится в точке $(0{,}5; -6{,}25)$. Прямая $y = k$ пересекает этот график ровно в одной точке при $k = -4$ и $k = -6{,}25$.

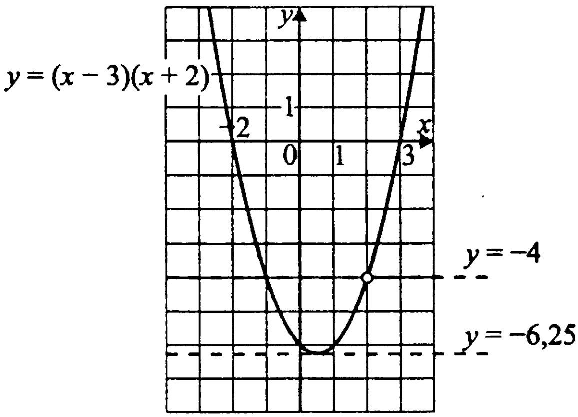


Рис. 81

Ответ: $-6{,}25$; -4.

24. Пусть $AB = x$. Так как периметр параллелограмма равен 28, то $AB + AD = 14$ и $AD = 14 - x$ (см. рис. 82).

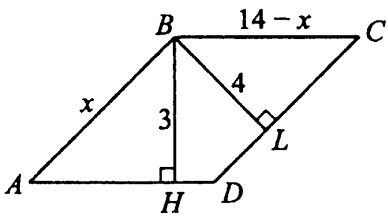


Рис. 82

$S_{ABCD} = AB \cdot BL = BC \cdot BH$, откуда $4x = 3(14 - x)$, $7x = 42$, $x = 6$.

В прямоугольном $\triangle ABH$ гипотенуза $AB = 6$, катет $BH = 3$. Так как катет в два раза меньше гипотенузы, то лежащий напротив него $\angle A = 30°$.

Ответ: 30.

25. Проведём радиусы OA и OB в точки касания (см. рис. 83). По свойству касательной к окружности она перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. $\triangle OAC = \triangle OBC$ по гипотенузе и катету:

$OA = OB$ как радиусы одной окружности, OC — общая сторона. Отсюда $AC = BC$, что и требовалось доказать.

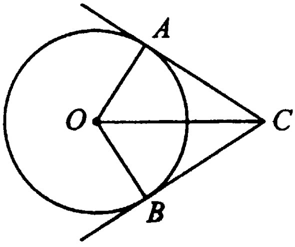


Рис. 83

26. Примем длину стороны ромба за 5 и проведём высоту AH (см. рис. 84). Из $\triangle ADH$ имеем: $AH = AD \sin \angle ADC = 5 \cdot 0{,}6 = 3$,
$DH^2 = AD^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, $DH = 4$. Так как DK является также высотой ромба, то $AKDH$ — прямоугольник и $DK = AH = 3$, $AK = DH = 4$.

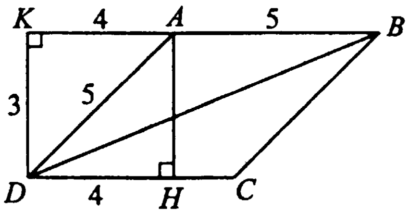


Рис. 84

Искомый $\sin \angle BDK$ найдём из прямоугольного $\triangle BDK$.
$BD^2 = KD^2 + KB^2 = 3^2 + (4+5)^2 = 90$, $BD = 3\sqrt{10}$.

$$\sin \angle BDK = \frac{BK}{BD} = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} = 0{,}3\sqrt{10}.$$

Ответ: $0{,}3\sqrt{10}$.

Решение варианта 28

21. $\dfrac{100^{n-3}}{5^{2n-4} \cdot 2^{2n-8}} = \dfrac{(2^2)^{n-3} \cdot 5^{2n-6}}{5^{2n-4} \cdot 2^{2n-8}} = 2^2 \cdot 5^{-2} = \dfrac{4}{25} = 0{,}16.$

Ответ: 0,16.

22. Пусть молодой рабочий изготавливает x деталей в час, а опытный рабочий $(x+4)$ детали в час. Опытный рабочий делает 40 деталей за

$\frac{40}{x+4}$ часов, а молодой рабочий делает 30 деталей за $\frac{30}{x}$ часов. Зная, что опытный рабочий делает 40 деталей на 1 час быстрее, чем молодой рабочий изготавливает 30 деталей, составим и решим уравнение.

$\frac{30}{x} - \frac{40}{x+4} = 1,$

$30(x+4) - 40x = x(x+4),$

$x^2 + 14x - 120 = 0,$

$x_1 = 6,\ x_2 = -20$. Так как $x > 0$, то $x = 6$.

Таким образом, молодой рабочий изготавливает 6 деталей в час, а опытный рабочий делает $6 + 4 = 10$ деталей в час. Работая вместе, они изготавливают в час $6+10 = 16$ деталей, делая 224 детали за $\frac{224}{16} = 14$ часов.

Ответ: 14.

23. Преобразуем выражение $\frac{(x^2-2x-3)(x^2-9)}{x^2-6x+9}$.

$\frac{(x^2-2x-3)(x^2-9)}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+1)(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = (x+1)(x+3)$, $x \neq 3$.

Графиком функции $y = (x+1)(x+3)$, $x \neq 3$ является парабола с выколотой точкой (3; 24) (см. рис. 85). Вершина параболы находится в точке $(-2; -1)$. Прямая $y = k$ пересекает этот график ровно в одной точке при $k = -1$ и $k = 24$.

Ответ: -1; 24.

24. Пусть $AB = x$ (см. рис. 86). Так как периметр параллелограмма равен 30, то $AB + BC = 15$ и $BC = 15 - x$.

$S_{ABCD} = AB \cdot BL = BC \cdot BH$, откуда $6x = 3(15-x)$, $2x = 15 - x$, $x = 5$.

В прямоугольном $\triangle ABH$ по теореме Пифагора
$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 3^2 = 16,\ AH = 4$.

$\operatorname{tg}\angle A = \frac{BH}{AH} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

Ответ: 0,75.

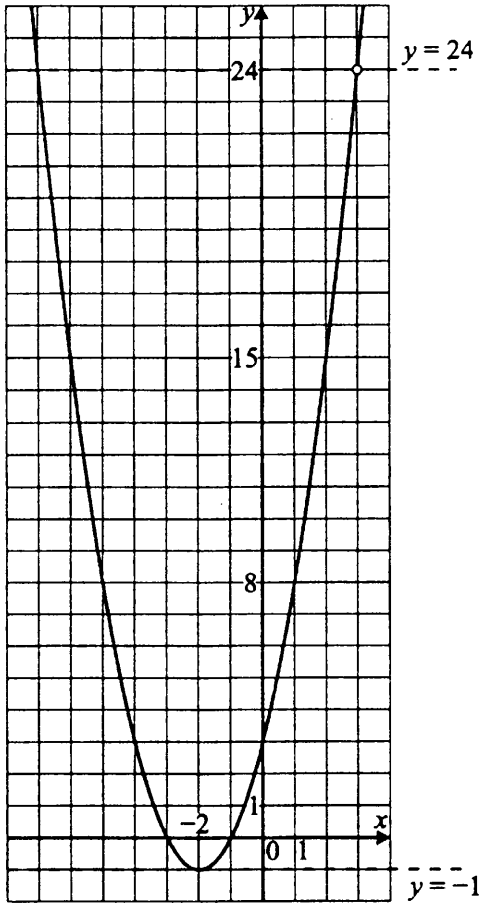


Рис. 85

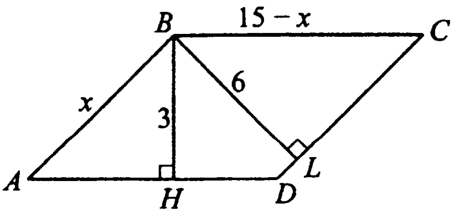


Рис. 86

25. $\angle DAB = \frac{1}{2}\smile BD$ как вписанный, опирающийся на $\smile BD$ (см. рис. 87).

$\angle BDE = \frac{1}{2}\smile BD$ как угол между касательной и хордой. Следовательно,

$\angle DAB = \angle BDE$ и $\triangle EAD \sim \triangle EDB$ по двум углам ($\angle E$ — общий). Отсюда $\frac{AE}{DE} = \frac{DE}{BE}$, $DE^2 = AE \cdot BE$, что и требовалось доказать.

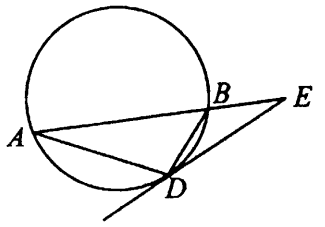


Рис. 87

26. 1) $\sin^2 \angle BCD = 1 - \cos^2 \angle BCD = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, $\sin \angle BCD = \frac{4}{5}$.

$S_{ABCD} = BC^2 \cdot \sin \angle BCD$, откуда $BC^2 \cdot \frac{4}{5} = 20$, $BC = 5$ (см. рис. 88). Таким образом, сторона ромба равна 5. $S_{ABCD} = BC \cdot DH$, отсюда $5 \cdot DH = 20$, $DH = 4$.

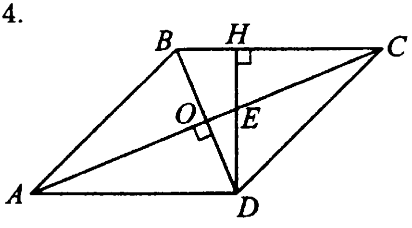


Рис. 88

2) Из $\triangle BDC$ по теореме косинусов:
$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 25 + 25 - 30 = 20$, $BD = 2\sqrt{5}$. Отсюда $OD = \sqrt{5}$, так как точка пересечения диагоналей ромба делит их пополам.

3) $\triangle ODE \sim \triangle HDB$ (прямоугольные с общим острым углом), поэтому $\frac{DE}{BD} = \frac{OD}{DH}$, $\frac{DE}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$, $DE = \frac{2 \cdot 5}{4} = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

Решение варианта 30

21. $\dfrac{7^{n+1}\cdot 2^{3n-4}}{56^{n-1}} = \dfrac{7^{n+1}\cdot 2^{3n}}{7^{n-1}\cdot 8^{n-1}\cdot 2^4} = \dfrac{7^{n+1}\cdot 8^n}{7^{n-1}\cdot 8^{n-1}\cdot 8\cdot 2} = \dfrac{7^{n+1}\cdot 8^n}{7^{n-1}\cdot 8^n\cdot 2} =$

$= \dfrac{7^{(n+1)-(n-1)}}{2} = \dfrac{7^2}{2} = \dfrac{49}{2} = 24{,}5.$

Ответ: 24,5.

22. Пусть x км/ч — искомая скорость лодки в стоячей воде. Тогда скорость лодки при движении против течения равна $x-3$ км/ч, а по течению — $x+3$ км/ч. Составим уравнение с учётом того, что на путь по течению затрачено на 2,5 часа меньше, чем на путь против течения.

$$\frac{90}{x-3} - \frac{90}{x+3} = 2{,}5,$$

$$90(x+3-x+3) = 2{,}5(x^2-9),\ \ 2{,}5(x^2-9) = 540,$$

$$x^2-9 = 216,\ \ x^2 = 225,\ \ x = 15\,(\text{км/ч}).$$

Ответ: 15.

23. а) Область определения функции: $x \neq -6$ и $x \neq 4$.

Поэтому в области определения функции получаем, что

$$y = \frac{(x^2-36)(x^2-16)}{(x+6)(x-4)} = \frac{(x-6)(x+6)(x-4)(x+4)}{(x+6)(x-4)} = (x-6)(x+4).$$

Графиком функции является парабола $y = (x-6)(x+4)$ с двумя «выколотыми» точками, которые получаются при $x = -6$ и $x = 4$.

При $x = -6$ получим, что $y = (-6-6)(-6+4) = 24$, при $x = 4$ получим $y = (4-6)(4+4) = -16$.

Вершина параболы имеет координаты $(1; -25)$.

Ветви параболы направлены вверх (см. рис. 89).

б) Из графика видно, что прямая $y = c$ пересекает построенный график функции в одной точке при $c = -25$, $c = -16$, $c = 24$.

Ответ: -25, -16, 24.

24. Рассмотрим рисунок 90.

По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, получаем $CH^2 = AH\cdot BH$, $(4\sqrt{3})^2 = AH\cdot 12$, $12AH = 48$, $AH = 4$. Тогда $AB = AH + HB = 4 + 12 = 16$.

Отсюда $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CH = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$.

Ответ: $32\sqrt{3}$.

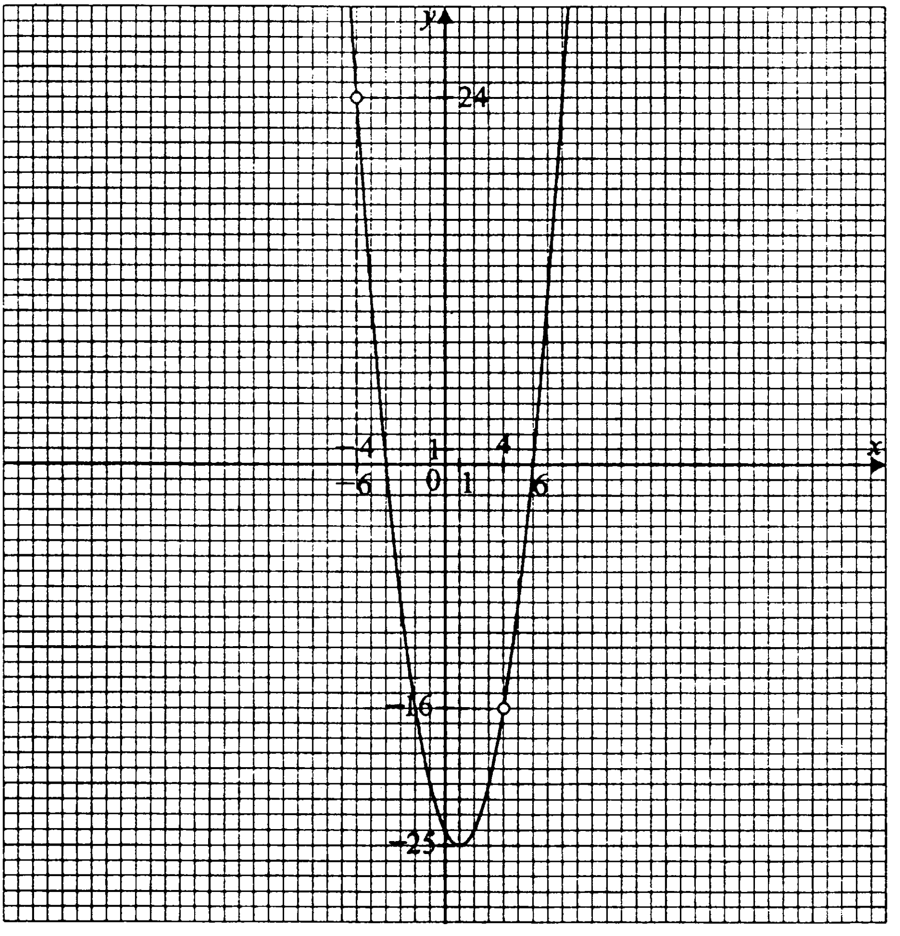


Рис. 89

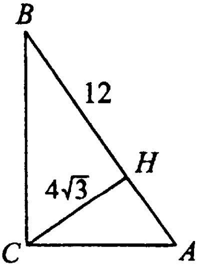


Рис. 90

25. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, поэтому её диагонали равны: $AC = BD$ (см. рис. 91).

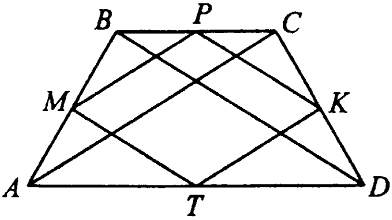


Рис. 91

MT и PK — средние линии треугольников BAD и BCD соответственно, поэтому $MT = PK = \dfrac{BD}{2}$. MP и TK — средние линии треугольников ABC и ADC соответственно, поэтому
$MP = TK = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2}$.

Следовательно, $MT = PK = MP = TK$ и $MPKT$ — ромб, что и требовалось доказать.

26. Рассмотрим рисунок 92.

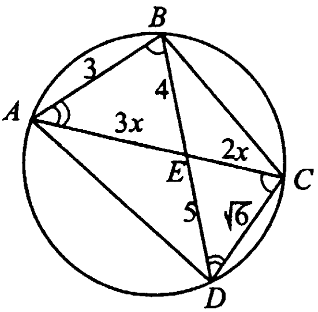


Рис. 92

Пусть $AE = 3x$, $EC = 2x$, $EB = u$, $ED = v$. Треугольники AEB и DEC подобны по двум углам ($\angle ABE = \angle ECD$, $\angle BAE = \angle EDC$, равенство углов следует из теоремы об измерении вписанных углов). Поэтому $\dfrac{u}{2x} = \dfrac{3x}{v} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$. Отсюда $u = \dfrac{6x}{\sqrt{6}}$, $v = \dfrac{3x\sqrt{6}}{3} = x\sqrt{6}$.

Значит, $\dfrac{u}{v} = \dfrac{6x}{\sqrt{6} \cdot x\sqrt{6}} = 1$.

Ответ: 1 : 1.

Решение варианта 31

21. Решим систему уравнений методом сложения.

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 5x + 2y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 2y = 10, \\ 5x + 2y = 12. \end{cases} \Rightarrow 11x = 22,\ x = 2.$$

$10 + 2y = 12,\ 2y = 2,\ y = 1.$

Ответ: $(2; 1)$.

22. Примем расстояние, которое туристы проплыли на плоту до места отдыха, за x км. Скорость плота равна скорости течения реки 4 км/ч. Время, за которое туристы доплыли до места отдыха, составляет $\frac{x}{4}$ часа. Вернулись до места отправления на катере, скорость которого против течения равна $(40 - 4)$ км/ч$=$ 36 км/ч, за $\frac{x}{36}$ часов. Из условия задачи следует, что время, за которое туристы доплывут до места отдыха и обратно, равно $18 - 7 - 6 = 5$ часам. Составим уравнение: $\frac{x}{4} + \frac{x}{36} = 5$. Решив уравнение, получим $x = 18$ (км).

Ответ: 18 км.

23. Необходимо построить график функции $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$. Разложим знаменатель дроби на множители: $y = \dfrac{x-2}{(x-1)(x-2)}$. При $x \neq 2$ и $x \neq 1$ функция примет вид $y = \dfrac{1}{x-1}$, её график — гипербола, из которой выколота точка $(2; 1)$ и асимптота которой $x = 1$ (см. рис. 93).

График имеет с прямой $y = a$ хотя бы одну общую точку при $a \neq 0$, $a \neq 1$.

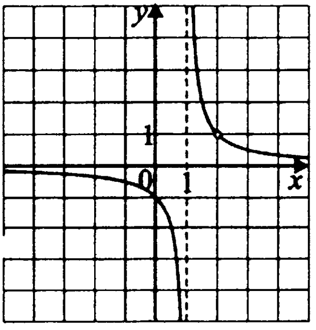


Рис. 93

Ответ: $a \neq 0, a \neq 1$.

24. Медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Отсюда $AC = 2BM = 34$ (см. рис. 94). По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 34^2 - 16^2 = 900$, $BC = 30$.

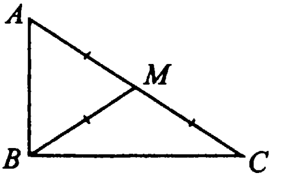


Рис. 94

Ответ: 30.

25. Дано:
$AA_1 \perp BC$, $CC_1 \perp AB$,
AA_1 и CC_1 — высоты (см. рис. 95).
Доказать:
$\angle AA_1C_1 = \angle ACC_1$.

Решение.

Так как $\angle AA_1C = \angle AC_1C = 90°$, то точки A, C_1, A_1, C лежат на одной окружности (см. рис. 95).

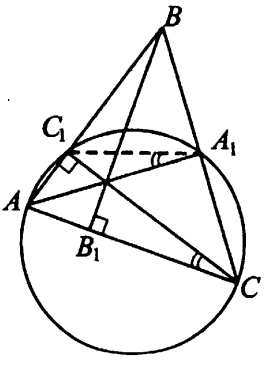


Рис. 95

$\angle AA_1C_1 = \angle ACC_1$ как вписанные в окружность, опирающиеся на общую дугу AC_1.

26. Дано:
$\angle A = 90°$,
$BC = 12$,
$AD = 48$.
Найти: OT.

Обозначим через F точку пересечения прямых AB и CD, T — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую CD. Пусть $\angle AFD = \alpha$ (см. рис. 96).

Тогда треугольники FBC, FOT, FAD — прямоугольные с общим углом F.

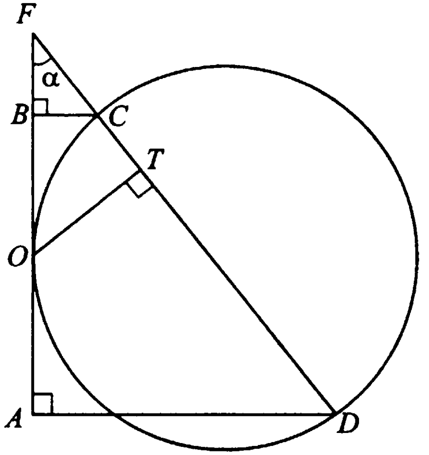


Рис. 96

$$\sin\alpha = \frac{BC}{FC},\ BC = FC \cdot \sin\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{AD}{FD},\ AD = FD \cdot \sin\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{OT}{FO},\ OT = FO \cdot \sin\alpha,$$

По теореме об отрезках касательной и секущей $FO^2 = FC \cdot FD$.
$OT^2 = FO^2 \cdot \sin^2\alpha = FC \cdot FD \cdot \sin^2\alpha = (FC \cdot \sin\alpha)(FD \cdot \sin\alpha) =$
$= BC \cdot AD = 12 \cdot 48 = 576,\ \ OT = 24.$

Ответ: 24.

Решение варианта 32

21. $\begin{cases} x - 4y = 5, \\ 3x + 2y = 43. \end{cases}$

Решим систему методом сложения.

$\begin{cases} 3x - 12y = 15, \\ 3x + 2y = 43. \end{cases} \Rightarrow 14y = 28,\ y = 2.\ x = 4y + 5,$
$x = 4 \cdot 2 + 5 = 8 + 5 = 13,\ x = 13.$

Ответ: $(13; 2)$.

22. Пусть искомое расстояние равно x км. Скорость плота при движении по течению равна 5 км/ч, а скорость катера при движении против течения равна $(50-5)$ км/ч, или 45 км/ч. Время, за которое плот доплывёт до места отдыха и катер до места отправления, равно $\left(\frac{x}{5} + \frac{x}{45}\right)$ часа. Из условия задачи следует, что это время равно $20-8-2 = 10$ ч. Составим уравнение.

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{45} = 10,\quad 9x + x = 450,\quad 10x = 450,\quad x = 45.$$

Ответ: 45 км.

23. $y = \dfrac{6x+6}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{6}{x-2},\ x \neq -1$. Графиком является гипербола с асимптотами $x = 2$ и $y = 0$ и выколотой точкой $(-1; -2)$. График имеет ровно одну общую точку с прямой $y = c$ при $c \neq -2$ и $c \neq 0$ (см. рис. 97).

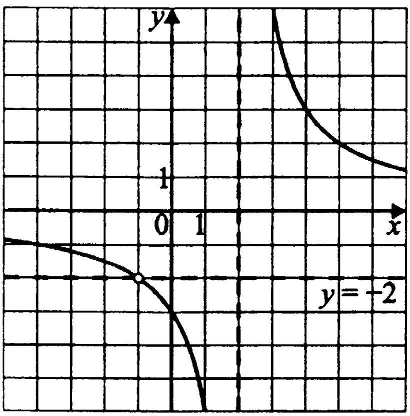


Рис. 97

Ответ: $c \neq -2,\ c \neq 0$.

24. $AB = 2CK = 10$, так как медиана, проведённая к гипотенузе, вдвое меньше гипотенузы (см. рис. 98). По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 - AC^2$, $BC^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, $BC = 8$.

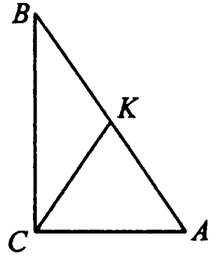


Рис. 98

Ответ: 8.

25. Центры окружностей P и Q лежат по разные стороны от прямой MN (см. рис. 99). В $\triangle QMN$ $QM = QN$ и в $\triangle PMN$ $PM = PN$ как радиусы окружностей с центрами в точках Q и P.

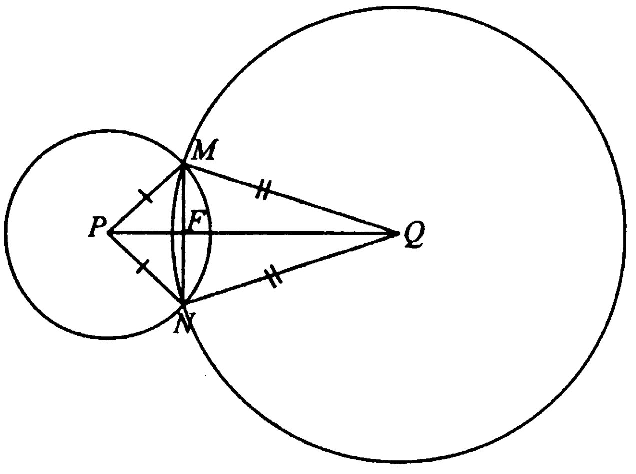


Рис. 99

$\triangle PMQ = \triangle PNQ$ по 3 сторонам (PQ — общая сторона), $\angle MQF = \angle NQF, \angle MPF = \angle NPF$.

В равнобедренных треугольниках QMN и PMN биссектриса QF является высотой, PF так же является медианой и высотой, следовательно, $MN \perp PQ$, что и требовалось доказать.

26. Пусть ABC — данный треугольник, $AB = BC = 16$, $\angle A = \angle C = 30°$ (см. рис. 100). Пусть R — радиус окружности, описанной около этого треугольника.

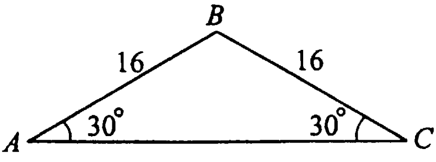


Рис. 100

По теореме синусов $2R = \dfrac{AB}{\sin\angle C} = \dfrac{16}{\sin 30°} = 16 : \dfrac{1}{2} = 32$. Так как диаметр описанной около треугольника окружности равен $2R$, то это и есть искомая величина.

Ответ: 32.

Решение варианта 34

21. Сделаем замену $(x+4)^2 = t$, получим уравнение $2t^2 - 3t - 2 = 0$.

$t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4}$;

$t_1 = 2, t_2 = -\dfrac{1}{2}$.

После обратной замены получаем

1) $(x+4)^2 = 2$; $x + 4 = \pm\sqrt{2}$, $x_1 = -4 - \sqrt{2}$, $x_2 = -4 + \sqrt{2}$.

2) $(x+4)^2 = -\dfrac{1}{2}$, уравнение решений не имеет.

Ответ: $-4 - \sqrt{2}, -4 + \sqrt{2}$.

22. Пусть v км/ч — скорость 1-го автомобиля, тогда $(v + 10)$ км/ч скорость 2-го автомобиля. Заметим, что 50 минут составляют $\dfrac{5}{6}$ часа. Согласно условию, получаем уравнение

$\dfrac{600}{v} - \dfrac{600}{v+10} = \dfrac{5}{6}$.

$\dfrac{600v + 6000 - 600v}{v(v+10)} = \dfrac{5}{6}$,

$\dfrac{1\,200}{v(v+10)} = \dfrac{1}{6}$,

$v^2 + 10v - 7\,200 = 0$,

$$v_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 28\,800}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{28\,900}}{2} = \frac{-10 \pm 170}{2}.$$

$v_1 = -90$, $v_2 = 80$.

Скорость 1-го автомобиля равна 80 км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

23. а) Функция $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-2}$ определена при любом $x \neq 2$. При этом

если $x \neq 2$, то $\dfrac{x^3 - 2x}{x-2} = \dfrac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2$.

Таким образом, график функции $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-2}$ получается из графика функции $y = x^2$ удалением одной точки. Абсцисса этой точки равна 2, а ордината равна $2^2 = 4$. Графиком функции $y = x^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх и вершина находится в начале координат. Построим график заданной функции (см. рис. 101).

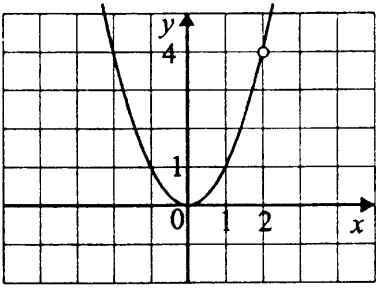


Рис. 101

б) Прямая $y = c$ пересекает график функции ровно в двух точках при $c > 0$ и $c \neq 2$. Действительно, при $c < 0$ прямая $y = c$ вообще не пересекает график функции, при $c = 4$ пересекает ровно в одной точке, так как проходит через выколотую точку, а при $c = 0$ также пересекает в одной точке.

Ответ: $(0; 4) \cup (4; +\infty)$.

24. Рассмотрим рисунок 102, где O — центр указанной окружности.

Отметим, что $BH = 2R$, где R — радиус указанной окружности. По свойству вписанных углов дуга окружности PK содержит $90°$, поэтому угол POK равен $90°$. Тогда по теореме Пифаго-

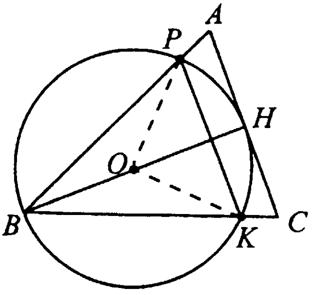


Рис. 102

ра $PK^2 = PO^2 + OK^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, $PK = R\sqrt{2}$, $R = \dfrac{PK}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Значит, $BH = 2R = 6\sqrt{2}$.

Ответ: $6\sqrt{2}$.

25. Рассмотрим рисунок 103.

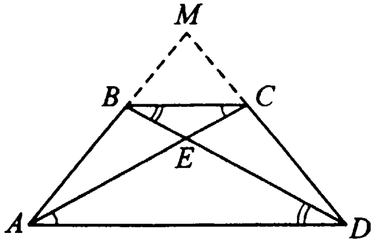


Рис. 103

Треугольники AED и BEC подобны по двум углам. Сходственными являются следующие пары сторон: BE и ED, BC и AD.

Пусть $BE = 3x$, тогда $ED = 5x$, $\dfrac{ED}{BE} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{5x}{3x}$.

Отметим, что треугольники AMD и BMC также подобны по двум углам, сходственными сторонами являются AD и BC. По теореме о том, что площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, получаем $S_{ADM} : S_{BCM} = \dfrac{(5x)^2}{(3x)^2} = 25 : 9$. Что и требовалось доказать.

26. Пусть $CT \perp AD$ (см. рис. 104). Обозначим $CD = a$. Из $\triangle CDT$ по свойству катета, лежащего против угла 30°, получаем $CT = \dfrac{a}{2}$.

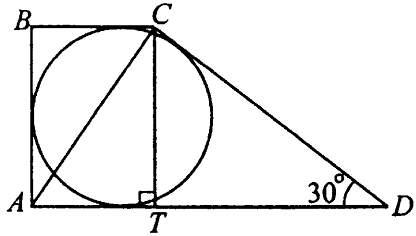


Рис. 104

$TD = CD\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $ABCT$ — прямоугольник, поэтому $BC = AT$, $AB = CT$. Трапеция $ABCD$ описана около окружности, следовательно $AB + CD = BC + AD$, $\frac{a}{2} + a = AT + \left(AT + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\frac{3-\sqrt{3}}{2}a = 2AT$, $AT = \frac{3-\sqrt{3}}{4}a$.

Из $\triangle ACT$:

$$\operatorname{tg}\angle CAT = \frac{a}{2} : \frac{(3-\sqrt{3})a}{4} = \frac{2}{3-\sqrt{3}} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$.

Решение варианта 35

21. $$\frac{7^{5n}\cdot 14^{2n}\cdot 9^{5n}\cdot 2401^n}{21^{10n-2}\cdot 28^n} = \frac{7^{5n}\cdot 7^{2n}\cdot 2^{2n}\cdot 3^{10n}\cdot 7^{4n}}{7^{10n-2}\cdot 3^{10n-2}\cdot 2^{2n}\cdot 7^n} =$$

$$= \frac{2^{2n}\cdot 3^{10n}\cdot 7^{5n+2n+4n}}{2^{2n}\cdot 3^{10n-2}\cdot 7^{10n-2+n}} = 3^2\cdot 7^{11n-11n+2} = 9\cdot 7^2 = 441.$$

Ответ: 441.

22. Пусть x км/ч — скорость пассажирского поезда, его длина равна 800 м (0,8 км); скорость скорого поезда равна 120 км/ч, а его длина — 700 м (0,7 км). Скорый поезд догнал пассажирский и прошёл мимо него за 100 с $= \frac{1}{36}$ ч. С другой стороны, то же самое время можно получить, разделив сумму длин поездов на разность их скоростей (так как поезда движутся в одном направлении):

$$\frac{0{,}8+0{,}7}{120-x} = \frac{1}{36};\quad 1{,}5\cdot 36 = 120 - x;\quad 54 = 120 - x;\quad x = 66.$$

Ответ: 66.

23. Построим график функции $y = \begin{cases} x^2 - 2, \text{ при } |x+2| \leqslant 5, \\ -\dfrac{6}{x}, \text{ при } |x+2| > 5. \end{cases}$

1. Графиком функции $y = x^2 - 2$ является парабола с вершиной $(0; -2)$, ветви направлены вверх. Параболу нужно построить в области $|x+2| \leqslant 5$, $-5 \leqslant x+2 \leqslant 5$, $-7 \leqslant x \leqslant 3$. Для построения графика составим таблицу значений функции $y = x^2 - 2$ в некоторых точках.

x	-2	-1	0	1	3
y	2	-1	-2	-1	7

2. Графиком функции $y = -\dfrac{6}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены во второй и четвёртой четвертях. Гиперболу нужно построить в областях $x < -7$ и $x > 3$. Для построения графика составим таблицу значений функции $y = -\dfrac{6}{x}$ в некоторых точках.

x	-8	-7	3	4	6
y	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{6}{7}$	-2	$-1{,}5$	-1

График заданной функции изображён на рисунке 105.

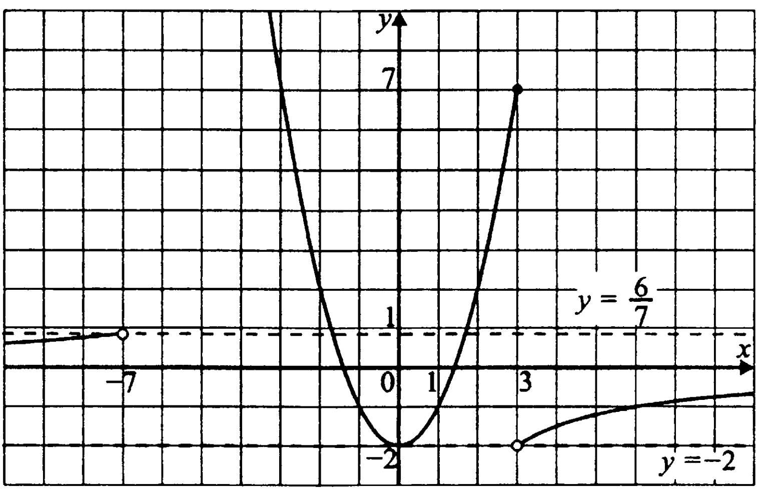


Рис. 105

Прямая $y = c$ пересекает построенный график в трёх точках при $-2 < c < 0$ и $0 < c < \frac{6}{7}$.

Ответ: $(-2; 0) \cup \left(0; \frac{6}{7}\right)$.

24. Длины отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны. Обозначим искомые длины отрезков сторон треугольника, заключённых между вершинами и точками касания, через x, y и z (см. рис. 106).

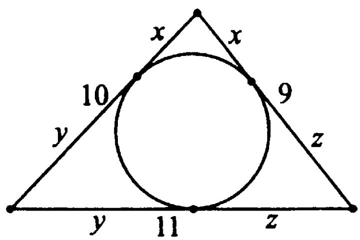


Рис. 106

Исходя из имеющихся данных, составим систему $\begin{cases} x + y = 10, \\ x + z = 9, \\ y + z = 11. \end{cases}$

Складывая все три уравнения системы, получаем $2(x + y + z) = 10 + 9 + 11$, откуда $x + y + z = 15$. Вычитая из последнего уравнения поочерёдно каждое уравнение рассмотренной системы, получаем: $z = 5$, $y = 6$, $x = 4$.

Ответ: 5; 4; 4; 6; 6; 5.

25. Пусть $EFMN$ — четырёхугольник, образованный серединами сторон четырёхугольника $ABCD$ (см. рис. 107). Тогда EF и NM — средние линии треугольников ABC и ADC соответственно, поэтому $EF \parallel AC \parallel NM$. Кроме того, $\Delta EBF \sim \Delta ABC$ и $\Delta NDM \sim \Delta ADC$ (в обоих случаях у треугольников общий угол и пропорциональны прилежащие стороны). Коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$ для обеих пар треугольников. Следовательно, $S_{EBF} = \frac{1}{4}S_{ABC}$, $S_{NDM} = \frac{1}{4}S_{ADC}$. Складывая последние два равенства, получаем: $S_{EBF} + S_{NDM} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

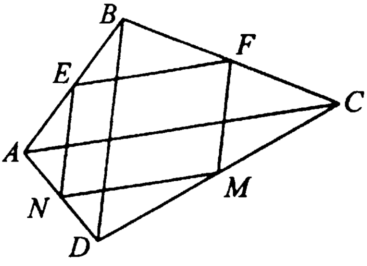


Рис. 107

Аналогично $EN \parallel FM$ (откуда по определению $EFMN$ — параллелограмм ввиду $EF \parallel NM$) и $S_{AEN} + S_{CFM} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

$S_{EFMN} = S_{ABCD} - S_{EBF} - S_{NDM} - S_{AEN} - S_{CFM} =$
$= S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

26. Так как длина окружности равна $8\sqrt{3}\pi$, то её радиус $R = \frac{8\sqrt{3}\pi}{2\pi} = 4\sqrt{3}$. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B} = 2R$, откуда $BC = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 30° = 4\sqrt{3}$, $AC = 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin 45° = 4\sqrt{6}$. Проведём в $\triangle ABC$ высоту CH (см. рис. 108).

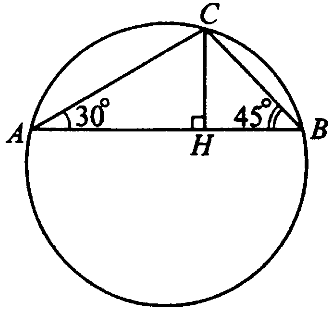


Рис. 108

Из $\triangle ACH$: $CH = AC\sin 30° = 4\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{6}$,

$AH = AC\cos 30° = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2}$.

Из $\triangle BCH$: $BH = BC\cos 45° = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot (6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{6} =$$
$$= 6\sqrt{12} + 2\sqrt{36} = 12(1 + \sqrt{3}).$$

Ответ: $12(1 + \sqrt{3})$.

Решение варианта 36

21. $\dfrac{6^{4n-1} \cdot 49^{2n+3} \cdot 48}{3^{4n} \cdot 14^{4n+3}} = \dfrac{2^{4n-1} \cdot 3^{4n-1} \cdot 7^{2(2n+3)} \cdot 2^4 \cdot 3}{3^{4n} \cdot 2^{4n+3} \cdot 7^{4n+3}} =$
$= 2^{4n-1+4-4n-3} \cdot 3^{4n-1+1-4n} \cdot 7^{4n+6-4n-3} = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 7^3 = 343.$

Ответ: 343.

22. Пусть x км — длина скорого поезда, его скорость равна 150 км/ч; длина пассажирского равна 700 м (0,7 км), а его скорость — 120 км/ч. Скорый поезд встретил пассажирский и прошёл мимо него за 15 с $= \dfrac{1}{240}$ ч. С другой стороны, то же самое время можно получить, разделив сумму длин поездов на сумму их скоростей (так как поезда движутся навстречу друг другу):

$$\frac{x + 0{,}7}{120 + 150} = \frac{1}{240}; \quad x + 0{,}7 = \frac{9}{8}; \quad x + 0{,}7 = 1{,}125; \quad x = 0{,}425 \text{ (км)}.$$

Искомая длина 0,425 км = 425 м.

Ответ: 425.

23. Построим график функции $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ при } |x-2| \geqslant 1, \\ \dfrac{3}{x}, \text{ при } |x-2| < 1. \end{cases}$

1. Графиком функции $y = 2 - x^2$ является парабола с вершиной $(0; 2)$, ветви направлены вниз. Параболу нужно построить в области $|x - 2| \geqslant 1$, то есть при $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 3$. Для построения графика составим таблицу значений функции $y = 2 - x^2$ в некоторых точках.

x	-2	-1	0	1	3
y	-2	1	2	1	-7

2. Графиком функции $y = \dfrac{3}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены в первой и третьей четвертях. Гиперболу нужно построить в области $|x - 2| < 1$, то есть при $1 < x < 3$. Для построения графика составим таблицу значений функции $y = \dfrac{3}{x}$ в некоторых точках.

x	1	2	3
y	3	1,5	1

График заданной функции изображён на рисунке 109.

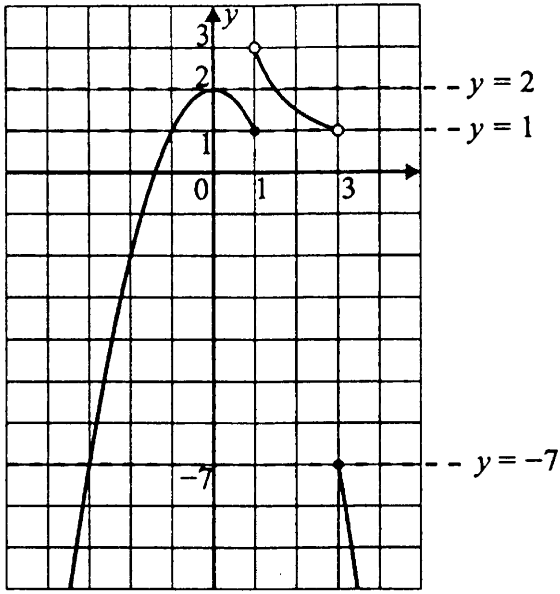


Рис. 109

Прямая $y = c$ пересекает построенный график ровно в двух точках при $c = 2,\ c = 1,\ c \leqslant -7$.

Ответ: $(-\infty; -7] \cup \{1\} \cup \{2\}$.

24. Длины отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны. Обозначим искомые длины отрезков сторон треугольника, заключённых между вершинами и точками касания, через x, y и z (см. рис. 110).

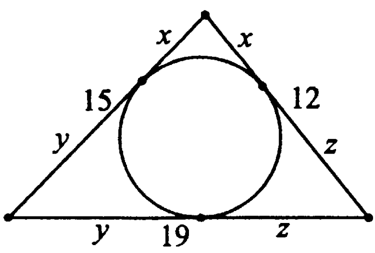


Рис. 110

Исходя из имеющихся данных, составим систему $\begin{cases} x+y=15, \\ x+z=12, \\ y+z=19. \end{cases}$

Складывая все три уравнения системы, получаем $2(x+y+z)=15+12+19$, откуда $x+y+z=23$. Вычитая из последнего уравнения поочерёдно каждое уравнение рассмотренной системы, получаем: $z=8$, $y=11$, $x=4$.

Ответ: 8; 4; 4; 11; 11; 8.

25. $AB = AC$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, $OB = OC$ как радиусы одной окружности. Отсюда $\triangle BAO = \triangle CAO$ (по трём сторонам) и $\angle BAM = \angle CAM$. Биссектриса AM равнобедренного $\triangle BAC$ является его высотой (см. рис. 111).

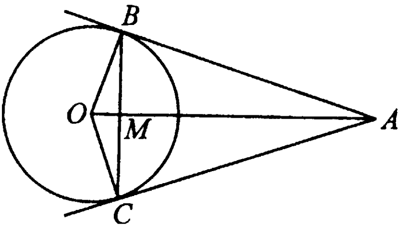


Рис. 111

$\triangle BMA \sim \triangle OBA$ (прямоугольные с общим острым углом). Следовательно, $\dfrac{BM}{OB} = \dfrac{MA}{BA}$, откуда $R = OB = \dfrac{AB \cdot BM}{AM}$, что и требовалось доказать.

26. Так как в трапецию можно вписать окружность, то $AB + CD = BC + AD$, откуда $AB = CD = \dfrac{12+4}{2} = 8$. Опустим высоты трапеции BM и CT (см. рис. 112). Тогда $\triangle ABM = \triangle DCT$ (по гипотенузе и катету), откуда $AM = DT = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{12-4}{2} = 4$.

Из $\triangle ABM$: $BM^2 = AB^2 - AM^2 = 64 - 16 = 48$, $BM = 4\sqrt{3}$, $\sin\angle A = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Из $\triangle BDM$: $BD^2 = BM^2 + MD^2 = 48 + 64 = 112$, $BD = 4\sqrt{7}$.

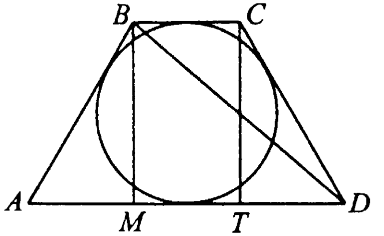


Рис. 112

Окружность, описанная около трапеции $ABCD$, совпадает с окружностью, описанной около $\triangle ABD$. Обозначим радиус этой окружности через R. По теореме синусов $2R = \dfrac{BD}{\sin\angle A} = 4\sqrt{7}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{3}$; $R = \dfrac{4\sqrt{21}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$.

Решение варианта 38

21. $(4x^2+3x)(-2-x^2) \geqslant 7(-2-x^2)$.

Так как $-2-x^2<0$ для любого $x\in R$, то при делении обеих частей на $(-2-x^2)$ неравенство сменит знак:

$4x^2+3x\leqslant 7$,

$4x^2+3x-7\leqslant 0$,

$4(x-1)\left(x+\frac{7}{4}\right)\leqslant 0$,

$-\frac{7}{4}\leqslant x\leqslant 1$ (см. рис. 113).

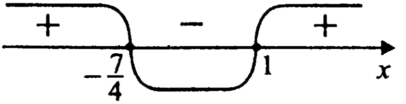


Рис. 113

Ответ: $[-1{,}75;\ 1]$.

22. Поезд, вышедший из A, был в пути 5 ч 42 мин = 5,7 ч, а вышедший из B — 5 ч 42 мин + 38 мин = $6\frac{1}{3}$ ч. Поезда сближаются со скоростью

$\dfrac{285}{5{,}7}+\dfrac{285}{6\frac{1}{3}}$ (км/ч), а время до встречи равно

$$285:\left(\frac{285}{5{,}7}+\frac{285}{6\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{\frac{10}{57}+\frac{3}{19}}=\frac{57}{19}=3\,(\text{ч}).$$

3 ч = 180 мин.

Ответ: 180.

23. Если графики функций $y=x^2+ax$ и $y=2x-1$ имеют ровно одну общую точку, то уравнение $x^2+ax=2x-1$ имеет единственный корень. Дискриминант квадратного уравнения $x^2+(a-2)x+1=0$ равен нулю: $(a-2)^2-4=0$, откуда $a=0$ или $a=4$ (см. рис. 114).

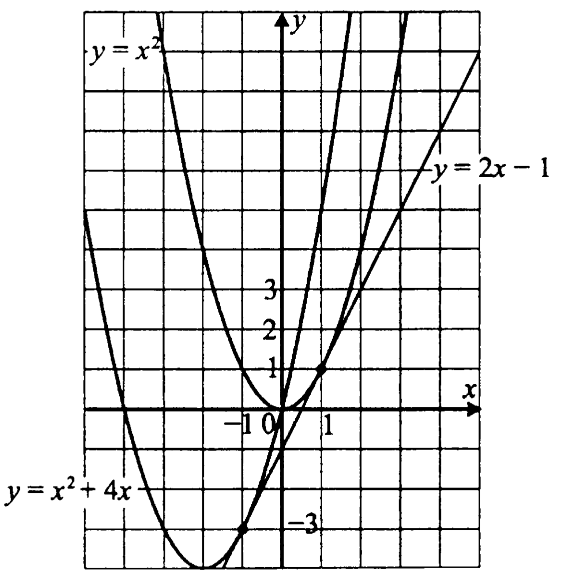


Рис. 114

Ответ: 0; 4.

24. Стороны ромба равны, поэтому $CD = DE = DH + HE = 21 + 8 = 29$ (см. рис. 115).

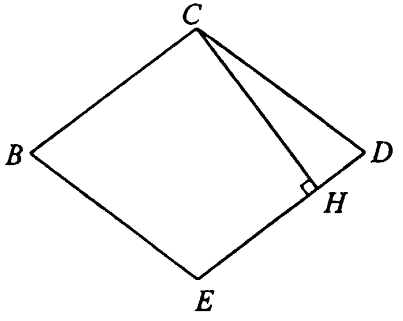


Рис. 115

Так как CH высота, то треугольник CHD прямоугольный. По теореме Пифагора $CH^2 = CD^2 - DH^2 = 29^2 - 21^2 = 400$.

$CH = 20$.

Ответ: 20.

25. Обозначим $\angle C = x$ (см. рис. 116).

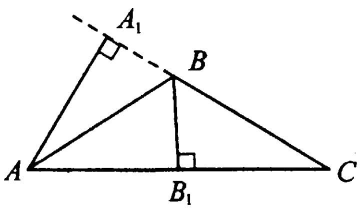


Рис. 116

Треугольник AA_1C прямоугольный, поэтому $CA_1 = CA\cos x$.

Треугольник BB_1C прямоугольный, поэтому $CB_1 = CB\cos x$.

Значит, в треугольниках A_1B_1C и ABC угол C общий, прилежащие к нему стороны пропорциональны $CA_1 : CA = CB_1 : CB = \cos x$. Следовательно, они подобны.

26. Обозначим центры окружностей S и T, точку касания окружностей Q. Продлим боковые стороны AB и CD до пересечения в точке O. Обозначим середины отрезков BC и AD за M и N (см. рис. 117).

$OB = OC$ как отрезки касательных, проведённых из точки O к первой окружности. $OA = OD$ как отрезки касательных, проведённых из точки O ко второй окружности. Поэтому $AB = OA - OB = OC - OD = CD$

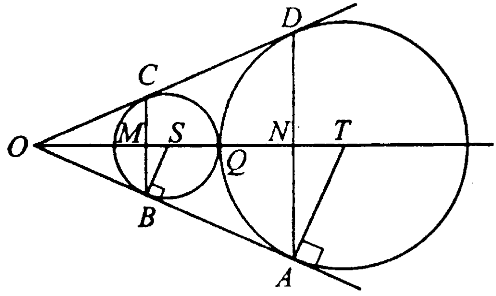


Рис. 117

и трапеция равнобедренная. Значит, рисунок симметричен относительно прямой ST, и точки O, M, Q, N также лежат на оси симметрии, а основания трапеции перпендикулярны оси симметрии. Отсюда заключаем, что MN равно высоте трапеции.

$BO \perp BS$ как касательная и радиус, проведённый к точке касания. Аналогично $AT \perp AO$. Следовательно, $BS \parallel AT$ и $\Delta OBS \sim \Delta OAT$, откуда $OS : OT = BS : AT = 2 : 3,\ \ OT = \dfrac{3}{2} \cdot OS.$

$OT = OS + SQ + QT = OS + 5,\ \ \dfrac{3}{2} \cdot OS = OS + 5,\ \ OS = 10.$

Треугольник OBS прямоугольный, так как $BO \perp BS$. По теореме Пифагора $OB = \sqrt{OS^2 - BS^2} = 4\sqrt{6},\ \cos\angle BOS = \dfrac{OB}{OS} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}.$

$OM \perp BC$ как медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника OBC. Поэтому треугольник OBM прямоугольный и $OM = OB\cos\angle BOS = 9{,}6$.

Аналогично рассматривая треугольники OAT и ONA, находим $ON = 14{,}4$.

Следовательно, $MN = ON - OM = 4{,}8$.

Ответ: 4,8.

Решение варианта 39

21. $4(x-1)^2 = (2+x)^2;\ 4(x-1)^2-(x+2)^2 = 0;\ \big(2(x-1)\big)^2-(x+2)^2 = 0.$

Воспользуемся формулой разности квадратов $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$\big(2(x-1) - (x+2)\big)\big(2(x-1) + (x+2)\big) = 0;\ \ (x-4)\cdot 3x = 0;$

$\left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ 3x=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=0. \end{array}\right.$

Ответ: 0; 4.

22. В 24 кг 6%-го раствора соли содержится $24 \cdot 0{,}06 = 1{,}44$ кг соли. В новом растворе эти 1,44 кг соли должны составлять 5% от общей массы. Значит, масса нового раствора должна стать равной $\dfrac{1{,}44}{0{,}05} = 28{,}8$ кг. Таким образом, потребуется долить $28{,}8 - 24 = 4{,}8$ кг воды.

Ответ: 4,8.

23. Если графики функций $y = x^2 - p$ и $y = 2x + 3$ имеют ровно одну общую точку, то уравнение $x^2 - p = 2x + 3$ имеет единственное решение. Таким образом, дискриминант квадратного уравнения $x^2 - 2x - (p+3) = 0$ должен быть равен нулю.

$$D = 4 + 4(p + 3) = 4(p + 4) = 0, \ p = -4.$$

Подставим $p = -4$ в уравнение и найдём абсциссу точки пересечения графиков.
$x^2 - 2x + 1 = 0, \ (x - 1)^2 = 0, \ x = 1.$
$y(x) = 2x + 3, \ y(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5.$

Общая точка графиков (1; 5) (см. рис. 118).

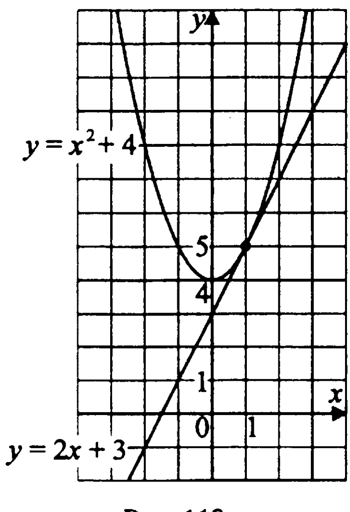


Рис. 118

Ответ: (1; 5).

24. $\angle AKB = \angle KAD$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AK (см. рис. 119), и по условию $\angle BAK = \angle KAD$, значит, $\angle BAK = \angle BKA$ и треугольник ABK равнобедренный. Тогда $AB = BK = 7$ см, $BC = AD = 7 + 4 = 11$ см.
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2(AB + BC) = 2(7 + 11) = 36$ (см).

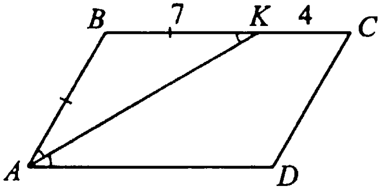


Рис. 119

Ответ: 36 см.

25. Угол BAC — вписанный, опирающийся на дугу BC, значит, $\angle BAC = \frac{1}{2}\smile BC$, $\smile BC = 2\angle BAC$. Аналогично $\smile AD = 2\angle ACD$ и из равенства углов BAC и ACD следует, что $\smile AD = \smile BC$.

26. По свойству биссектрисы $AD : CD = AB : BC$, значит, если $BC = y$, то $AB = 5y$. Точка M — середина AB, тогда $AM = BM = 2{,}5y$ (см. рис. 120). В треугольнике MBC по свойству биссектрисы $MO : OC = BM : BC = 2{,}5$.

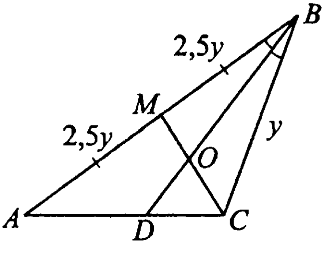


Рис. 120

Треугольники BCM и ACM имеют общую высоту, проведённую из вершины C, и $BM = AM$, значит, $S_{BCM} = S_{ACM} = \frac{105}{2}$. Треугольники BMO и BCO имеют общую высоту, проведённую из вершины B. Тогда $S_{BMO} : S_{BCO} = MO : CO = 2{,}5$, $S_{BMO} = \frac{5}{7}S_{BMC} = \frac{5}{7}\cdot\frac{105}{2} = \frac{75}{2}$.

Треугольники ABD и BDC имеют общую высоту, проведённую из вершины B. Тогда $S_{ABD} : S_{BDC} = AD : DC = 5$, $S_{BDC} = \frac{1}{6}S_{ABC} = \frac{105}{6} = \frac{35}{2}$.

$$S_{AMOD} = S_{ABC} - S_{BDC} - S_{BMO} = 105 - \frac{35}{2} - \frac{75}{2} = 50.$$

Ответ: 50.

Решение варианта 40

21. $9(x+1)^2 = (3+x)^2$; $\left|3(x+1)\right| = |3+x|$.

Если модули чисел равны, то сами числа либо равны, либо противоположны.

$$\left[\begin{array}{l} 3(x+1) = 3+x, \\ 3(x+1) = -(3+x); \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x = 0, \\ 4x = -6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: $-1{,}5$; 0.

22. Исходный раствор содержал $20 \cdot 0{,}3 = 6$ кг соли и $20 - 6 = 14$ кг воды. Новый раствор содержит 6 кг соли и $14 + 10 = 24$ кг воды, значит, процентное содержание соли в нём равно $\frac{6}{24+6} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%$.

Ответ: 20.

23. Если графики функций $y = a - x^2$ и $y = 4x - 1$ имеют ровно одну общую точку, то квадратное уравнение $a - x^2 = 4x - 1$ имеет единственный корень.

$x^2 + 4x - 1 - a = 0$; $D = 4^2 + 4(a+1) = 4(a+5) = 0$, $a = -5$.

Подставим $a = -5$ в уравнение и найдём абсциссу точки пересечения графиков.

$x^2 + 4x + 4 = 0$, $(x+2)^2 = 0$, $x = -2$.

$y(x) = 4x - 1$, $y(-2) = 4 \cdot (-2) - 1 = -9$.

Общая точка графиков $(-2; -9)$ (см. рис. 121).

Ответ: $(-2; -9)$.

24. $\angle KMP = \angle MPD$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых MK и DC секущей MP (см. рис. 122), и по условию $\angle KMP = \angle DMP$, значит, $\angle DMP = \angle MPD$ и треугольник DMP равнобедренный. Тогда $DM = DP = 3$ см,

$P_{DMKC} = DM + MK + KC + DC = 2(DM + MK) = 2(3+11) = 28$ (см).

Ответ: 28 см.

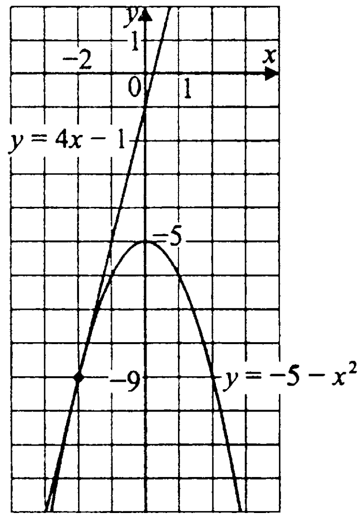


Рис. 121

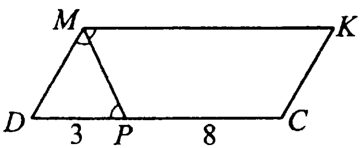


Рис. 122

25. Пусть OM и O_1M_1 — медианы треугольников AOC и $A_1O_1C_1$ соответственно (см. рис. 123). Рассмотрим треугольники OCM и $O_1C_1M_1$: $OC = O_1C_1$, $\angle OCM = \angle O_1C_1M_1$, $MC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = M_1C_1$. Тогда $\triangle OMC = \triangle O_1M_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников, откуда $OM = O_1M_1$.

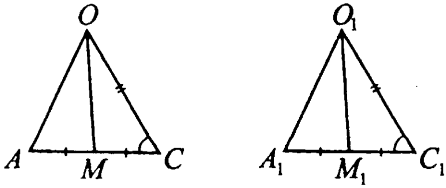


Рис. 123

26. Так как $KLMN$ — ромб, то $KL = KN$ (см. рис. 124). В треугольнике LKN высота LH является также медианой, значит, этот треугольник равнобедренный с основанием KN, откуда $LK = LN$. Тогда $\triangle KLN$ равносторонний со стороной 4 и, значит, $LH = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

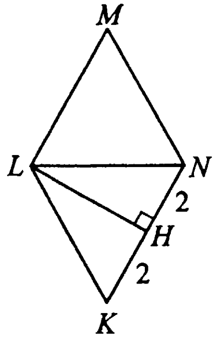


Рис. 124

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Глава II. Решения задач из сборника

1. По условию задачи рост Томы больше среднего на 8%, значит, на $150 \cdot 0{,}08 = 12$ (см). Так как средний рост девочек возраста Томы равен 150 см, то рост Томы равен $150 + 12 = 162$ (см).

Ответ: 162.

2. На второй день цена розы снизилась на 15% от цены первого дня, то есть на $80 \cdot 0{,}15 = 12$ (руб.), и составила $80 - 12 = 68$ (руб.). Тогда на третий день цена снизилась на 15% от цены второго дня, то есть на $68 \cdot 0{,}15 = 10{,}2$ (руб.), и составила $68 - 10{,}2 = 57{,}8$ (руб.).

Ответ: 57,8.

3. По условию задачи 1,44 м составляет 75%. Пусть x м — высота прыжка взрослого кенгуру. Тогда x составляет 100%. Следовательно,

$$x = \frac{1{,}44 \cdot 100}{75} = 1{,}92\,(\text{м}) = 192\,(\text{см}).$$

Ответ: 192.

4. По условию в первом магазине число порций мороженого уменьшилось на 50%; это означает, что порций мороженого стало меньше в 2 раза. Таким образом, во втором магазине осталось больше порций мороженого.

Ответ: во втором.

5. Пусть x шт. — первоначальное количество книг в каждой из библиотек. Тогда в первой библиотеке количество книг увеличилось на $x \cdot 0{,}8$ (шт.) и стало равно $x + 0{,}8x = 1{,}8x$. Значит, количество книг в первой библиотеке увеличилось в 1,8 раза. Так как во второй библиотеке количество книг увеличилось в 1,7 раза, то в первой библиотеке книг стало больше.

Ответ: в первой библиотеке.

6. Увеличение количества хомячков во втором аквариуме в 1,6 раза означает, что количество хомячков в нём составило $1{,}6 \cdot 100\% = 160\%$, то есть увеличилось на 60% от первоначального количества. Так как в первом аквариуме количество хомячков увеличилось на столько же процентов, то хомячков осталось поровну.

Ответ: хомячков осталось поровну.

7. Так как через неделю на обоих складах комплектов мебели стало поровну и количество готовой продукции на первом складе не изменилось, то количество комплектов мебели на втором складе увеличилось в 2 раза, то есть составило $2 \cdot 100\% = 200\%$. Следовательно, количество продукции на этом складе увеличилось на 100%.

Ответ: 100.

8. Пусть в маленьком аквариуме было x рыб, тогда в большом аквариуме было $2x$ рыб. Через два года в большом аквариуме количество рыб уменьшилось на 25%, то есть составило $2x - 2x \cdot 0{,}25 = 1{,}5x$, а в маленьком — $1{,}5x$. Следовательно, рыб стало поровну.

Ответ: рыб стало поровну.

9. Пусть во втором спичечном коробке было x спичек. Тогда в первом коробке было $3x$ спичек. Через день в первом коробке число спичек стало $\frac{3x}{4} = 0{,}75x$, во втором — $x - 0{,}3x = 0{,}7x$. Следовательно, в первом коробке спичек осталось больше.

Ответ: в первом коробке.

10. Пусть на складе B было x продукции. Тогда на складе A было $x + x \cdot 0{,}5 = 1{,}5x$ продукции. Через месяц количество продукции на складе A уменьшилось в 1,25 раза, то есть составило $\frac{1{,}5x}{1{,}25} = 1{,}2x$. На складе B через месяц количество продукции увеличилось на 25%, то есть составило $x + x \cdot 0{,}25 = 1{,}25x$. Значит, на складе B продукции стало больше.

Ответ: B.

11. Пусть в 9-х классах обучается x человек. По условию число неуспевающих в 8 раз меньше числа успевающих, значит, отношение числа неуспевающих учащихся к числу успевающих равно $1 : 8$. Следовательно, $\frac{x}{9}$ — неуспевающих учащихся, $\frac{8x}{9}$ — успевающих.

Так как отличники составляют 15% от числа всех учащихся 9-х классов, то их количество $\frac{15x}{100} = \frac{3x}{20}$ человек.

Приведём дроби $\frac{x}{9}, \frac{8x}{9}, \frac{3x}{20}$ к общему знаменателю: $\frac{20x}{180}, \frac{160x}{180}, \frac{27x}{180}$. Следовательно, наименьшее число учащихся 9-х классов, удовлетворяющих условию задачи, равно 180.

Ответ: 180.

12. Пусть в школе x девочек и x мальчиков. Тогда блондинок — $0{,}15 \cdot x$, а блондинов — $\frac{1}{7} \cdot x$ (мальчиков с иным цветом волос $\frac{6}{7} \cdot x$).

$0{,}15x = \frac{15}{100}x = \frac{3}{20}x = \frac{21}{140}x$; $\frac{1}{7}x = \frac{20}{140}x$.

Так как $\frac{21}{140} > \frac{20}{140}$, то $0{,}15x > \frac{1}{7}x$. Следовательно, в школе блондинок больше.

Ответ: блондинок.

13. Переведём десятичную дробь 0,25 в проценты: $0{,}25 \cdot 100\% = 25\%$. Следовательно, спортсмен улучшил свой результат на 25%.

Ответ: 25.

14. Температура воздуха понизилась на 30%, то есть на $20° \cdot 0{,}30 = 6°$. Следовательно, температура составила $20° - 6° = 14°$.

Ответ: 14.

15. Пусть нужно взять x кг воды. Тогда получим $(x + 0{,}2)$ кг раствора, что составляет 100%. По условию 0,2 кг соли в этом растворе должно составлять 5%. Следовательно, $\frac{x + 0{,}2}{0{,}2} = \frac{100}{5}$; $x + 0{,}2 = \frac{0{,}2 \cdot 100}{5}$; $x = 4 - 0{,}2 = 3{,}8$.

Ответ: 3,8.

16. Расстояние S км за 10,5 ч мотоциклист преодолевает со скоростью $\frac{S}{10{,}5}$ км/ч, а это же расстояние за 8 ч 24 мин $= 8\frac{24}{60}$ ч $= 8{,}4$ ч он преодолевает со скоростью $\frac{S}{8{,}4}$ км/ч.

Пусть скорость мотоциклиста повысилась на $x\%$ от первоначальной, то есть на $\frac{S}{10{,}5} + \frac{S}{10{,}5} \cdot \frac{x}{100} = \frac{S}{8{,}4}$; $\left(\frac{x}{100} + 1\right) \cdot \frac{1}{10{,}5} = \frac{1}{8{,}4}$; $\frac{x}{100} = 0{,}25$; $x = 25\%$.

Ответ: 25.

17. Всего в походе участвовало $20 + 60 = 80$ детей, что составляет 100%. Следовательно, 60 мальчиков от общего числа ребят составляет

$\frac{60 \cdot 100\%}{80} = 75\%$.

Ответ; 75.

18. Увеличение зарплаты на 20% от 4000 рублей составляет
$4000 \cdot 0{,}2 = 800$ (руб.). Следовательно, рабочий стал получать
$4000 + 800 = 4800$ (руб.).

Ответ: 4800.

19. Увеличение цены товара на 15% от 600 рублей составляет $600 \cdot 0{,}15 = 90$ (руб.). Следовательно, товар будет стоить $600 + 90 = 690$ (руб.).

Ответ: 690.

20. По расчётам первой группы физиков масса барионной материи составляет $\frac{1}{25}$ массы Вселенной, что составляет $\frac{1}{25} \cdot 100\% = 4\%$ от массы Вселенной. Следовательно, вторая группа физиков отводит массе барионной материи бо́льшую долю — 4,5%.

Ответ: вторая.

21. Пусть в прошлом году в каждом филиале было по x клиентов. Тогда в этом году в первом филиале стало $x + x\frac{150\%}{100\%} = 2{,}5x$ клиентов, что совпадает с числом клиентов во втором филиале, которое возросло в этом году в 2,5 раза.

Ответ: количество клиентов в обоих филиалах осталось одинаковым.

22. $$\frac{25x^2-9}{x^2+x-12} \cdot \frac{x+4}{5x+3} + \frac{2x}{3-x} =$$
$$= \frac{(5x-3)(5x+3)(x+4)}{(x-3)(x+4)(5x+3)} + \frac{2x}{3-x} = \frac{5x-3}{x-3} - \frac{2x}{x-3} =$$
$$= \frac{5x-3-2x}{x-3} = \frac{3(x-1)}{x-3}.$$

Ответ: $\frac{3(x-1)}{x-3}$.

23. $$\frac{9x^2-49}{2x^2+15x-8} \cdot \frac{x+8}{3x+7} - \frac{1}{1-2x} =$$
$$= \frac{(3x-7)(3x+7)}{2x^2+16x-x-8} \cdot \frac{x+8}{3x+7} + \frac{1}{2x-1} =$$
$$= \frac{(3x-7)(x+8)}{(x+8)(2x-1)} + \frac{1}{2x-1} = \frac{3x-7}{2x-1} + \frac{1}{2x-1} = \frac{3x-6}{2x-1}.$$

Ответ: $\frac{3(x-2)}{2x-1}$.

24. $$\left(\frac{(x+3y)^2+3y(x-3y)}{xy(x-3y)(x+3y)}\right)\cdot\frac{y(9y^2-x^2)}{(9y+x)^2}=$$
$$=\frac{x^2+6xy+9y^2+3xy-9y^2}{xy(x^2-9y^2)}\cdot\frac{y(9y^2-x^2)}{(9y+x)^2}=$$
$$=-\frac{x^2+9xy}{xy}\cdot\frac{y}{(9y+x)^2}=-\frac{1}{x+9y}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{x+9y}$.

25. $$\left(\frac{2x+y}{2x^2y-xy^2}-\frac{2}{y^2+2xy}\right):\frac{(6x+y)^2}{4x^3-y^2x}=$$
$$=\left(\frac{2x+y}{xy(2x-y)}-\frac{2}{y(2x+y)}\right)\cdot\frac{x(2x-y)(2x+y)}{(6x+y)^2}=$$
$$=\frac{(2x+y)x(2x-y)(2x+y)}{xy(2x-y)(6x+y)^2}-\frac{2x(2x-y)(2x+y)}{y(2x+y)(6x+y)^2}=$$
$$=\frac{4x^2+4xy+y^2-4x^2+2xy}{y(6x+y)^2}=\frac{6xy+y^2}{y(6x+y)^2}=\frac{y(6x+y)}{y(6x+y)^2}=\frac{1}{6x+y}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{6x+y}$.

26. $$\left(\frac{a^2-4b^2}{a^2+ab-6b^2}-\frac{a^2-9b^2}{a^2+6ab+9b^2}\right)\cdot\frac{a+3b}{b}=$$
$$=\left(\frac{(a-2b)(a+2b)}{(a-2b)(a+3b)}-\frac{(a-3b)(a+3b)}{(a+3b)^2}\right)\cdot\frac{a+3b}{b}=$$
$$=\left(\frac{a+2b}{a+3b}-\frac{a-3b}{a+3b}\right)\cdot\frac{a+3b}{b}=\frac{a+2b-a+3b}{a+3b}\cdot\frac{a+3b}{b}=\frac{5b}{b}=5.$$

Ответ: 5.

27. $$\left(\frac{6a+1}{a^2-6a}+\frac{6a-1}{a^2+6a}\right)\cdot\frac{a^4-35a^2-36}{a^4+2a^2+1}=$$
$$=\frac{6a^2+a+36a+6+6a^2-36a-a+6}{a(a-6)(a+6)}\cdot\frac{a^4-36a^2+a^2-36}{\left(a^2+1\right)^2}=$$

$$= \frac{12a^2+12}{a(a-6)(a+6)} \cdot \frac{(a^2-36)a^2+(a^2-36)}{(a^2+1)^2} =$$

$$= \frac{12(a^2+1)(a^2-36)(a^2+1)}{a(a^2-36)(a^2+1)^2} = \frac{12}{a}.$$

Ответ: $\frac{12}{a}$.

28. $\left(\frac{x+7a}{7ax-x^2} + \frac{x-7a}{7ax+x^2}\right) : \frac{28a}{x^2-49a^2} =$

$$= \left(\frac{x+7a}{x(7a-x)} + \frac{x-7a}{x(7a+x)}\right) \cdot \frac{(x-7a)(x+7a)}{28a} =$$

$$= \frac{(x+7a)(x-7a)(x+7a)}{x(7a-x)\cdot 28a} + \frac{(x-7a)(x-7a)(x+7a)}{x(7a+x)\cdot 28a} =$$

$$= \frac{-x^2-14ax-49a^2+x^2-14ax+49a^2}{28ax} = \frac{-28ax}{28ax} = -1.$$

Ответ: -1.

29. $\left(\frac{x-4a}{4ax-x^2} + \frac{4a+x}{4xa+x^2}\right) : \frac{16a}{x^2-16a^2} =$

$$= \left(\frac{x-4a}{x(4a-x)} + \frac{4a+x}{x(4a+x)}\right) : \frac{16a}{(x-4a)(x+4a)} =$$

$$= \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)\frac{(x-4a)(x+4a)}{16a} = 0 \cdot \frac{(x-4a)(x+4a)}{16a} = 0.$$

Ответ: 0.

30. $\left(\frac{x^2-2ax+4a^2}{x-2a} + \frac{x^2+2ax+4a^2}{2a+x}\right) \cdot \frac{4a^2-x^2}{2x^3} =$

$$= \frac{x^3+8a^3+x^3-8a^3}{(x-2a)(x+2a)} \cdot \frac{(2a-x)(2a+x)}{2x^3} = -\frac{2x^3(2a-x)(2a+x)}{(2a-x)(2a+x)\cdot 2x^3} =$$
$$= -1.$$

Ответ: -1.

31. $\left(\frac{x+4a}{x-a} - \frac{3-ax}{x+a} - \frac{5a-3-a^2}{x^2-a^2} : \frac{1}{x}\right)(x^2-a^2) =$

$$= \left(\frac{x+4a}{x-a} - \frac{3-ax}{x+a} - \frac{(5a-3-a^2)x}{(x-a)(x+a)}\right)(x^2-a^2) =$$

$$= (x+4a)(x+a) - (3-ax)(x-a) - x(5a-3-a^2) =$$

$= x^2 + 4ax + ax + 4a^2 - 3x + 3a + ax^2 - a^2x - 5ax + 3x + a^2x =$
$= x^2 + ax^2 + 4a^2 + 3a.$

Ответ: $x^2 + ax^2 + 4a^2 + 3a$.

32. $\dfrac{b^2}{a-b} : \left(\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab+b^2} - \dfrac{a^2-ab+b^2}{ab-b^2}\right) =$

$= \dfrac{b^2}{a-b} : \dfrac{a^3-b^3-a^3-b^3}{b(a-b)(a+b)} = \dfrac{b^2 \cdot b(a-b)(a+b)}{(a-b)\left(-2b^3\right)} = -\dfrac{a+b}{2}.$

Ответ: $-\dfrac{a+b}{2}$.

33. $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right) \cdot \dfrac{ab^3-a^4}{b^5-4a^4b} =$

$= \dfrac{(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)-(a-b)\left(a^2-ab+b^2\right)}{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)} \cdot \dfrac{a\left(b^3-a^3\right)}{b\left(b^4-4a^4\right)} =$

$= \dfrac{a^3+a^2b+ab^2+a^2b+ab^2+b^3-\left(a^3-a^2b+ab^2-a^2b+ab^2-b^3\right)}{a^3-b^3} \times$

$\times \dfrac{a\left(a^3-b^3\right)}{b\left(4a^4-b^4\right)} = \dfrac{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3-a^3+2a^2b-2ab^2+b^3}{1} \times$

$\times \dfrac{a}{b\left(4a^4-b^4\right)} = \dfrac{2b^3+4a^2b}{1} \cdot \dfrac{a}{b\left(4a^4-b^4\right)} = \dfrac{2b\left(b^2+2a^2\right) \cdot a}{b\left(2a^2-b^2\right)\left(2a^2+b^2\right)} =$

$= \dfrac{2a}{2a^2-b^2}.$

Ответ: $\dfrac{2a}{2a^2-b^2}$.

34. $\left(\dfrac{2a-4b}{b^2+4ab} - \dfrac{3a+b}{b^2-4ab}\right)\left(b^2-4ab\right) + \dfrac{21a^2+6b^2-9ab}{4a+b} =$

$= \dfrac{\left(2ab-4b^2-8a^2+16ab-3ab-b^2-12a^2-4ab\right)b(b-4a)}{b(b+4a)(b-4a)} +$

$+ \dfrac{21a^2+6b^2-9ab}{4a+b} = \dfrac{11ab-5b^2-20a^2+21a^2+6b^2-9ab}{4a+b} =$

$= \dfrac{2ab+b^2+a^2}{4a+b} = \dfrac{(a+b)^2}{4a+b}.$

Ответ: $\dfrac{(a+b)^2}{4a+b}$.

35. $\left(\dfrac{a+b}{a^2-b}-\dfrac{a-b}{a^2+b}\right):\dfrac{a+1}{a^2-b}=$

$$=\frac{\left(a^3+ab+a^2b+b^2-a^3+ab+a^2b-b^2\right)\left(a^2-b\right)}{\left(a^2-b\right)\left(a^2+b\right)(a+1)}=$$

$$=\frac{2ab+2a^2b}{\left(a^2+b\right)(a+1)}=\frac{2ab(a+1)}{(a^2+b)(a+1)}=\frac{2ab}{a^2+b}.$$

Ответ: $\dfrac{2ab}{a^2+b}$.

36. $\dfrac{16}{a+5}-\dfrac{3-2a}{72a^2+24a+8}\cdot\dfrac{-8+216a^3}{2a^2+7a-15}=$

$$=\frac{16}{a+5}+\frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)}\cdot\frac{-8\left(1-27a^3\right)}{2a^2-3a+10a-15}=$$

$$=\frac{16}{a+5}+\frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)}\cdot\frac{-8(1-3a)\left(1+3a+9a^2\right)}{a(2a-3)+5(2a-3)}=$$

$$=\frac{16}{a+5}+\frac{2a-3}{8\left(9a^2+3a+1\right)}\cdot\frac{-8(1-3a)\left(9a^2+3a+1\right)}{(2a-3)(a+5)}=$$

$$=\frac{16}{a+5}+\frac{-(1-3a)}{a+5}=\frac{16-1+3a}{a+5}=\frac{3(a+5)}{a+5}=3.$$

Ответ: 3.

37. $\dfrac{a^2-1}{a+1}=\dfrac{(a-1)(a+1)}{a+1}=a-1;$

$$\frac{1}{a-1}-\frac{a^2-1}{a+1}=\frac{1}{a-1}-(a-1)=\frac{1-(a-1)^2}{a-1}=\frac{-a^2+2a}{a-1}=\frac{a^2-2a}{1-a}.$$

Итак, $\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{a^2-1}{a+1}\right)^{-1}+\dfrac{a^2-a-1}{a^2-2a}=\dfrac{1-a}{a^2-2a}+\dfrac{a^2-a-1}{a^2-2a}=$

$$=\frac{a^2-2a}{a^2-2a}=1.$$

Ответ: 1.

38. $\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{1}{a-1}\right)^{-1}+\dfrac{2}{a^2+1}=\left(\dfrac{a^2-a+a+1}{a^2-1}\right)^{-1}+\dfrac{2}{a^2+1}=$

$$=\frac{a^2-1}{a^2+1}+\frac{2}{a^2+1}=\frac{a^2+1}{a^2+1}=1.$$

Ответ: 1.

39. $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$

$=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=$

$=\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=$

$=a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b+a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b=2(a+b).$

Ответ: $2(a+b)$.

40. $\dfrac{(a+b)^3}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{a^3+3ab(a+b)+b^3}{a^2-ab+b^2},$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{3}{a+b}=\dfrac{b(a+b)+a(a+b)-3ab}{ab(a+b)}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab(a+b)},$

$3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{3}{a+b}\right)^{-1}=\dfrac{3ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}.$

$\dfrac{(a+b)^3}{a^2-ab+b^2}-3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{3}{a+b}\right)^{-1}=$

$=\dfrac{a^3+3ab(a+b)+b^3}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{3ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=$

$=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=a+b.$

Ответ: $a+b$.

41. $\left(a+\dfrac{b-a}{1+ab}\right):\left(1-\dfrac{a(b-a)}{1+ab}\right)=\dfrac{(a+a^2b+b-a)(1+ab)}{(1+ab)\left(1+ab-ab+a^2\right)}=$

$=\dfrac{b\left(a^2+1\right)}{a^2+1}=b.$

Ответ: b.

42. $\left(a-\dfrac{4a-9}{a-2}\right):\left(2a-\dfrac{2a}{a-2}\right)=\dfrac{a^2-2a-4a+9}{a-2}:\dfrac{2a^2-4a-2a}{a-2}=$

$=\dfrac{(a^2-6a+9)(a-2)}{(a-2)\left(2a^2-6a\right)}=\dfrac{(a-3)^2}{2a(a-3)}=\dfrac{a-3}{2a}.$

Ответ: $\dfrac{a-3}{2a}$.

43. $\left(x+1-\dfrac{12x-13}{x+3}\right):\left(x-3-\dfrac{7}{x+3}\right)=$

$=\dfrac{x^2+4x+3-12x+13}{x+3}:\dfrac{x^2-9-7}{x+3}=\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}=$

$=\dfrac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{x-4}{x+4}.$

Ответ: $\dfrac{x-4}{x+4}.$

44. $\dfrac{x}{\dfrac{2}{x+1}-1}-\dfrac{2+\dfrac{4x}{1-x}}{x+1}+3=\dfrac{x(x+1)}{1-x}-\dfrac{2+2x}{(1-x)(1+x)}+3=$

$=\dfrac{x(x+1)^2-2-2x+3\left(1-x^2\right)}{1-x^2}=$

$=\dfrac{x\left(x^2+2x+1\right)-2-2x+3-3x^2}{1-x^2}=$

$=\dfrac{x^3+2x^2+x-2x-3x^2+1}{1-x^2}=\dfrac{x^3-x^2-x+1}{1-x^2}=$

$=-\dfrac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{(x-1)\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)}=$

$=-\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=1-x.$

Ответ: $1-x.$

45. $\dfrac{18\cdot 12^{3n-1}}{9^{2n+1}\cdot 2^{4n-3}}=\dfrac{3^2\cdot 2\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^{3n-1}}{3^{2\cdot(2n+1)}\cdot 2^{4n-3}}=\dfrac{3^{2+3n-1}\cdot 2^{1+6n-2}}{3^{4n+2}\cdot 2^{4n-3}}=$

$=\dfrac{3^{3n+1}\cdot 2^{6n-1}}{3^{4n+2}\cdot 2^{4n-3}}=\dfrac{2^{2n+2}}{3^{n+1}}=\dfrac{4^{n+1}}{3^{n+1}}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1}.$

Ответ: $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1}.$

46. $\left(\dfrac{3}{4a-b}-\dfrac{2}{4a+b}-\dfrac{1}{4a-5b}\right):\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}=$

$=\left(\dfrac{12a+3b-8a+2b}{(4a-b)(4a+b)}-\dfrac{1}{4a-5b}\right):\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}=$

$$= \left(\frac{4a+5b}{16a^2-b^2} - \frac{1}{4a-5b}\right) : \frac{b^2}{16a^2-b^2} =$$

$$= \frac{\left(16a^2-25b^2-16a^2+b^2\right)\left(16a^2-b^2\right)}{\left(16a^2-b^2\right)(4a-5b)\cdot b^2} = \frac{-24}{4a-5b} = \frac{24}{5b-4a}.$$

Ответ: $\dfrac{24}{5b-4a}$.

47. $\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2} - \dfrac{1}{x^2+5x+6}\right) : \left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right) =$

$$= \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+2)}\right) : \frac{x+3-x-1}{(x+1)(x+3)} =$$

$$= \frac{(x+3-x-1)(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdot 2} = \frac{1}{x+2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{x+2}$.

48. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+2} + \dfrac{13}{4-\sqrt{3}}\right) \cdot \dfrac{1}{3+3\sqrt{3}} =$

$$= \left(\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} - \frac{\sqrt{3}-2}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)} + \frac{13\left(4+\sqrt{3}\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{3+3\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-2+4+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{3+3\sqrt{3}} = \left(3+3\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{3+3\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

49. Обозначим заданное выражение через A. Представим выражение под корнем в виде полных квадратов и получим

$$A = \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}.$$

При извлечении корня учитываем, что арифметический квадратный корень — величина неотрицательная:

$$A = (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

50. $\left(\dfrac{2m}{m-7} + \dfrac{4m}{m^2-14m+49}\right) \cdot \dfrac{m^2-9m+14}{m-5} + \dfrac{10m}{7-m} =$

$$= \left(\frac{2m}{m-7} + \frac{4m}{(m-7)^2}\right) \cdot \frac{(m-7)(m-2)}{m-5} + \frac{10m}{7-m} =$$

$$= \frac{(2m(m-7)+4m)(m-7)(m-2)}{(m-7)^2(m-5)} + \frac{10m}{7-m} =$$

$$= \frac{(2m^2 - 14m + 4m)(m-2)}{(m-7)(m-5)} + \frac{10m}{7-m} = \frac{2m(m-5)(m-2)}{(m-7)(m-5)} - \frac{10m}{m-7} =$$

$$= \frac{2m^2 - 4m - 10m}{m-7} = \frac{2m(m-7)}{m-7} = 2m.$$

Ответ: $2m$.

51. $$\left(\frac{m}{m-5} + \frac{3m}{2m^2 - 11m + 5}\right) \cdot \frac{m^2 + m - 30}{m+1} - \frac{4m}{2m-1} =$$

$$= \left(\frac{m}{m-5} + \frac{3m}{(m-5)(2m-1)}\right) \cdot \frac{(m+6)(m-5)}{m+1} - \frac{4m}{2m-1} =$$

$$= \frac{(2m^2 - m + 3m)(m+6)(m-5)}{(m-5)(2m-1)(m+1)} - \frac{4m}{2m-1} =$$

$$= \frac{2m(m+1)(m+6)}{(2m-1)(m+1)} - \frac{4m}{2m-1} = \frac{2m(m+6) - 4m}{2m-1} =$$

$$= \frac{2m^2 + 8m}{2m-1} = \frac{2m(m+4)}{2m-1}.$$

Ответ: $\frac{2m(m+4)}{2m-1}$.

52. $A = \sqrt{(2 - \sqrt[3]{20})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt[3]{20})^2} = |2 - \sqrt[3]{20}| + |3 - \sqrt[3]{20}|$.
Так как $2 < \sqrt[3]{20} < 3$, то $A = \sqrt[3]{20} - 2 + 3 - \sqrt[3]{20} = 1$.

Ответ: 1.

53. $A = \sqrt{(\sqrt[5]{240} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt[5]{240} - 3)^2} = |\sqrt[5]{240} - 2| + |\sqrt[5]{240} - 3|$.
Так как $2 < \sqrt[5]{240} < 3$, то получим $A = \sqrt[5]{240} - 2 + 3 - \sqrt[5]{240} = 1$.

Ответ: 1.

54. $$\left(\left(\frac{b^2 - 2b + 2}{b^4 + 4}\right)^{-1} - 1\right) \cdot (b+1)^{-1} = \left(\frac{b^4 + 4}{b^2 - 2b + 2} - 1\right) \cdot \frac{1}{b+1} =$$

$$= \frac{b^4 + 4 - b^2 + 2b - 2}{(b^2 - 2b + 2)(b+1)} = \frac{b^4 - b^2 + 2b + 2}{(b^2 - 2b + 2)(b+1)} =$$

$$= \frac{b^2(b^2 - 1) + 2(b+1)}{(b^2 - 2b + 2)(b+1)} = \frac{b^2(b-1) + 2}{b^2 - 2b + 2} = \frac{b^3 - b^2 + 2}{b^2 - 2b + 2} =$$

$$= \frac{(b+1)(b^2 - 2b + 2)}{b^2 - 2b + 2} = b + 1.$$

Ответ: $b + 1$.

55. $x^{-8}\cdot\left(\frac{1}{x-1}+(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\right)=$

$=x^{-8}\cdot\left(\frac{1+(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}{x-1}\right)=x^{-8}\cdot\frac{1+(x^4-1)(x^4+1)}{x-1}=$

$=x^{-8}\cdot\frac{1+x^8-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$

Ответ: $\frac{1}{x-1}$.

56. $\frac{4\cdot 36^n}{2^{2n+2}\cdot 3^{2n-3}}=\frac{4\cdot 6^{2n}}{2^2\cdot 2^{2n}\cdot 3^{2n}\cdot 3^{-3}}=\frac{6^{2n}\cdot 3^3}{6^{2n}}=3^3=27.$

Ответ: 27.

57. $\frac{8\cdot 100^n}{5^{2n-2}\cdot 2^{2n+1}}=\frac{8\cdot 10^{2n}}{5^{2n}\cdot 5^{-2}\cdot 2^{2n}\cdot 2}=\frac{4\cdot 10^{2n}\cdot 5^2}{10^{2n}}=4\cdot 5^2=100.$

Ответ: 100.

58. $\frac{(5^{1-5n})^2\cdot(4^{2n+1})^3\cdot(2{,}5)^{11n}}{160}=\frac{5^2\cdot 4^{6n}\cdot 4^3\cdot 5^{11n}}{5^{10n}\cdot 160\cdot 2^{11n}}=$

$=\frac{5^2\cdot 2^{12n}\cdot 4^2\cdot 2^2\cdot 5^n}{4^2\cdot 10\cdot 2^{11n}}=10\cdot 2^n\cdot 5^n=10\cdot 10^n=10^{n+1}.$

Ответ: 10^{n+1}.

59. $81\cdot\frac{(3\cdot 3^n)^{3n}}{(9^n)^2}:27^{n^2-n}=\frac{3^4\cdot 3^{3n}\cdot 3^{3n^2}}{(3^{2n})^2}:3^{3(n^2-n)}=$

$=\frac{3^{3n^2+3n+4}}{3^{4n}}:3^{3n^2-3n}=3^{3n^2+3n+4-4n-3n^2+3n}=3^{2n+4}=3^{2(n+2)}=$

$=9^{n+2}.$

Ответ: 9^{n+2}.

60. Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на число, сопряжённое знаменателю.

$\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=$

$=\frac{\sqrt{4}-1}{4-1}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{7-4}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{10-7}+\dots+\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{n+3-n}=$

$$= \frac{\sqrt{4}-1}{3} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{3} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{3} =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{n+3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{n+3}-1}{3}$.

61. $\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{10}-4)^2} = |\sqrt{10}-3| + |\sqrt{10}-4| =$
$= (\sqrt{10}-3) - (\sqrt{10}-4) = \sqrt{10}-3-\sqrt{10}+4 = 1.$

Ответ: 1.

62. $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} + \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} =$
$= \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| + 2+\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 4.$

Ответ: 4.

63. $\sqrt{21-12\sqrt{3}} + \sqrt{21+12\sqrt{3}} =$
$= \sqrt{12-12\sqrt{3}+9} + \sqrt{12+12\sqrt{3}+9} =$
$= \sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2} + \sqrt{\left(2\sqrt{3}+3\right)^2} =$
$= \left|2\sqrt{3}-3\right| + 2\sqrt{3}+3 = 2\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}+3 = 4\sqrt{3}.$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

64. $\frac{1}{\sqrt{4}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{22}} =$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} + \dots + \frac{5-\sqrt{22}}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-2+\sqrt{8}-\sqrt{5}+\dots+\right.$$

$$\left.+\sqrt{22}-\sqrt{19}+\sqrt{23}-\sqrt{20}+\sqrt{24}-\sqrt{21}+5-\sqrt{22}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{24}+5\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(4-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{24}\right).$$

С избытком:

$$\frac{1}{3}\cdot\left(4-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{24}\right) \approx \frac{1}{3}\cdot(4-1{,}4-1{,}7+4{,}8+4{,}9) \approx 3{,}53.$$

С недостатком:

$$\frac{1}{3}\cdot\left(4-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{24}\right) \approx \frac{1}{3}\cdot(4-1{,}5-1{,}8+4{,}7+4{,}8) = \frac{1}{3}\cdot 10{,}2 = 3{,}4.$$

Искомое число обозначим A. $3{,}4 < A < 3{,}5$, то есть оно лежит между 3 и 4.

Ответ: 3; 4.

65. $$\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)}+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}+\sqrt{13})}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)}+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}-\sqrt{13})}=$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+1)}+\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-1)}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\frac{1}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{7}\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})}+\frac{1}{\sqrt{7}\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{5})}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}+\sqrt{13})}+\frac{1}{\sqrt{15}\cdot(\sqrt{15}-\sqrt{13})}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}+\cdots+$$
$$+\frac{\sqrt{15}-\sqrt{13}+\sqrt{15}+\sqrt{13}}{2\sqrt{15}}=1+1+\cdots+1=7.$$

Ответ: 7.

66. Данное выражение имеет смысл при $a<0$, $b\leqslant 0$. Заметим, что $\sqrt{(-a)^2}=|a|=-a$ при $a<0$. Поэтому $\dfrac{\sqrt{ab}-a}{\sqrt{-a}}=\dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{(-a)^2}}{\sqrt{-a}}=$
$$=\frac{\sqrt{-a}\cdot(\sqrt{-b}+\sqrt{-a})}{\sqrt{-a}}=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}.$$

Ответ: $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$.

67. Заметим, что при $a<0$ имеем $\sqrt{(-a)^2}=|a|=-a$. Поэтому
$$\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}}{-\sqrt{(-b)^2}+\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-a}\cdot(-\sqrt{-a}+\sqrt{-b})}{\sqrt{-b}\cdot(-\sqrt{-b}+\sqrt{-a})}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ: $-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

68. $$\frac{2ab-10a+5-b}{2a^2-7a+3}=\frac{2a(b-5)-(b-5)}{2(a-3)\left(a-\frac{1}{2}\right)}=\frac{(b-5)(2a-1)}{(a-3)(2a-1)}=\frac{b-5}{a-3}.$$

Ответ: $\dfrac{b-5}{a-3}$.

69. $\dfrac{6-9n+6mn-4m}{3n^2+n-2}=\dfrac{3(2-3n)+2m(3n-2)}{3\left(n-\frac{2}{3}\right)(n+1)}=$

$=\dfrac{(3n-2)(2m-3)}{(3n-2)(n+1)}=\dfrac{2m-3}{n+1}.$

Ответ: $\dfrac{2m-3}{n+1}.$

70. $\dfrac{3ab+21a+2b+14}{9a^2+9a+2}=\dfrac{3a(b+7)+2(b+7)}{9a^2+6a+1+3a+1}=$

$=\dfrac{(b+7)(3a+2)}{(3a+1)^2+3a+1}=\dfrac{(b+7)(3a+2)}{(3a+1)(3a+2)}=\dfrac{b+7}{3a+1}.$

Ответ: $\dfrac{b+7}{3a+1}.$

71. $\dfrac{4ab-16a+b-4}{16a^2-8a-3}=\dfrac{4a(b-4)+b-4}{16a^2-8a+1-4}=\dfrac{(4a+1)(b-4)}{(4a-1)^2-2^2}=$

$=\dfrac{(4a+1)(b-4)}{(4a-3)(4a+1)}=\dfrac{b-4}{4a-3}.$

Ответ: $\dfrac{b-4}{4a-3}.$

72. $\left(\dfrac{n+1}{n^2+4n+4}-\dfrac{n-1}{n^2-4}\right):\dfrac{2n}{(n+2)^2}=$

$=\left(\dfrac{n+1}{(n+2)^2}-\dfrac{n-1}{(n-2)(n+2)}\right)\cdot\dfrac{(n+2)^2}{2n}=\left(n+1-\dfrac{(n-1)(n+2)}{n-2}\right)\cdot\dfrac{1}{2n}=$

$=\dfrac{(n+1)(n-2)-(n-1)(n+2)}{n-2}\cdot\dfrac{1}{2n}=\dfrac{(n^2-n-2)-(n^2+n-2)}{2n(n-2)}=$

$=\dfrac{-2n}{2n(n-2)}=\dfrac{-1}{n-2}=\dfrac{1}{2-n}.$

Ответ: $\dfrac{1}{2-n}.$

73. $\left(\dfrac{x}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right):\dfrac{5}{(x-1)^2}=\left(\dfrac{x}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x-1}\right)\cdot\dfrac{(x-1)^2}{5}=$

$=\dfrac{x-(x-1)}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{(x-1)^2}{5}=\dfrac{x-x+1}{5}=\dfrac{1}{5}=0{,}2.$

Ответ: 0,2.

74. $\left(\dfrac{a(1-a)}{2}+\dfrac{a^2-4a+3}{2a^2-6a}\right):(a-1)^2=$

$=\dfrac{a(1-a)\cdot a(a-3)+(a-3)(a-1)}{2a(a-3)}\cdot\dfrac{1}{(a-1)^2}=$

$=\dfrac{(a-1)(a-3)\left(1-a^2\right)}{2a(a-3)(a-1)^2}=\dfrac{(1-a)(1+a)}{2a(a-1)}=-\dfrac{1+a}{2a}.$

Ответ: $-\dfrac{1+a}{2a}.$

75. $\left(\dfrac{\left(b^2-3b+2\right)(b-1)}{b^2}-\dfrac{b^2-4b+3}{b}\right):(b-1)^2=$

$=\dfrac{\left(b^2-3b+2\right)(b-1)-b\left(b^2-4b+3\right)}{b^2(b-1)^2}=$

$=\dfrac{(b-1)(b-2)(b-1)-b(b-1)(b-3)}{b^2(b-1)^2}=$

$=\dfrac{(b-1)(b-2)-b(b-3)}{b^2(b-1)}=\dfrac{b^2-3b+2-b^2+3b}{b^2(b-1)}=\dfrac{2}{b^2(b-1)}.$

Ответ: $\dfrac{2}{b^2(b-1)}.$

76. $\left(\dfrac{k+2}{k^2+3k-4}-\dfrac{k-8}{k^2+8k+16}\right):\dfrac{5}{(k+4)^2}=$

$=\left(\dfrac{k+2}{(k+4)(k-1)}-\dfrac{k-8}{(k+4)^2}\right)\cdot\dfrac{(k+4)^2}{5}=$

$=\dfrac{(k+2)(k+4)-(k-8)(k-1)}{(k+4)^2(k-1)}\cdot\dfrac{(k+4)^2}{5}=$

$=\dfrac{\left(k^2+6k+8\right)-\left(k^2-9k+8\right)}{5(k-1)}=\dfrac{15k}{5(k-1)}=\dfrac{3k}{k-1}.$

Ответ: $\dfrac{3k}{k-1}.$

77. $\left(\dfrac{1}{t^2-4}-\dfrac{1}{t^2+t-6}\right):\dfrac{1}{t^2+5t+6}=$

$=\left(\dfrac{1}{(t-2)(t+2)}-\dfrac{1}{(t+3)(t-2)}\right)\cdot\dfrac{(t+3)(t+2)}{1}=$

$$= \frac{(t+3)-(t+2)}{(t-2)(t+2)(t+3)} \cdot (t+3)(t+2) = \frac{1}{t-2}.$$

Ответ: $\frac{1}{t-2}$.

78. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} =$

$$= \frac{(b-c)+(c-a)+(a-b)}{(a-c)(a-b)(b-c)} = \frac{0}{(a-c)(a-b)(b-c)} = 0.$$

Ответ: 0.

79. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} =$

$$= \frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{a^2b-a^2c-b^2a+b^2c+c^2a-c^2b}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{b(a-c)(a+c)-b^2(a-c)-ac(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-c)[b(a+c)-b^2-ac)]}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-c)[b(a-b)-c(a-b)]}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1.$$

Ответ: 1.

80. $\left(\frac{m-3}{m^2-4m+3} - \frac{2m}{m^2-1}\right) : \frac{1}{5m+5} =$

$$= \left(\frac{m-3}{(m-3)(m-1)} - \frac{2m}{(m-1)(m+1)}\right) \cdot 5(m+1) =$$

$$= \frac{m+1-2m}{(m-1)(m+1)} \cdot 5(m+1) = \frac{1-m}{m-1} \cdot 5 = -5.$$

Ответ: -5.

81. $\left(\frac{m+3}{m^2+4m+4} - \frac{2m+6}{m^2+5m+6}\right) \cdot \frac{m^2-4}{m+1} =$

$$= \left(\frac{m+3}{(m+2)^2} - \frac{2(m+3)}{(m+2)(m+3)}\right) \cdot \frac{(m-2)(m+2)}{m+1} =$$

$$= \frac{m+3-2(m+2)}{(m+2)^2} \cdot \frac{(m-2)(m+2)}{m+1} = \frac{-m-1}{m+2} \cdot \frac{m-2}{m+1} = \frac{2-m}{m+2}.$$

Ответ: $\frac{2-m}{m+2}$.

82. $\left(\frac{x-1}{x^2-6x+8} - \frac{3}{x^2-16}\right) : \frac{2x^2+4}{x^2+2x-8} + \frac{1}{8-2x} =$

$$= \left(\frac{x-1}{(x-4)(x-2)} - \frac{3}{(x-4)(x+4)}\right) : \frac{2x^2+4}{(x+4)(x-2)} + \frac{1}{8-2x} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+4)-3(x-2)}{(x-4)(x-2)(x+4)} \cdot \frac{(x+4)(x-2)}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2(4-x)} =$$

$$= \frac{x^2+3x-4-3x+6}{2(x-4)(x^2+2)} + \frac{1}{2(4-x)} = \frac{x^2+2}{2(x-4)(x^2+2)} - \frac{1}{2(x-4)} = 0.$$

Ответ: 0.

83. $\left(\frac{x+6}{x^2-6x} + \frac{x-6}{x^2+6x}\right) : \frac{x^2+36}{x^2-36} - \frac{2}{x} =$

$$= \left(\frac{x+6}{x(x-6)} + \frac{x-6}{x(x+6)}\right) \cdot \frac{x^2-36}{x^2+36} - \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{(x+6)^2+(x-6)^2}{x(x-6)(x+6)} \cdot \frac{(x-6)(x+6)}{x^2+36} - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2+36)}{x(x^2+36)} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0.$$

Ответ: 0.

84. $\left(\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} - \frac{a^2}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{-1}{b^2}\right) =$

$$= \left(\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2} - \frac{a^2}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{-1}{b^2}\right) =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)-a^2}{a+b} \cdot \left(\frac{-1}{b^2}\right) = \frac{1}{a+b}.$$

Ответ: $\frac{1}{a+b}$.

85. $\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} + \frac{b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{3b} = \left(\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} + \frac{b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{3b} =$

$$= \frac{(a-b)+b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{3b} = \frac{a}{3b}.$$

Ответ: $\frac{a}{3b}$.

86. $\left(\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1}\right)\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{4a^2}\right)=$

$=\frac{(2a+1)^2-(2a-1)^2}{(2a-1)(2a+1)}\cdot\frac{4a^2-4a+1}{4a^2}=$

$=\frac{(4a^2+4a+1-4a^2+4a-1)(2a-1)^2}{(2a-1)(2a+1)4a^2}=$

$=\frac{8a(2a-1)}{(2a+1)\cdot 4a^2}=\frac{2(2a-1)}{a(2a+1)}=\frac{4a-2}{2a^2+a}$, что и требовалось доказать.

87. $\left(a-b+\frac{4ab}{a-b}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{2ab}{b^2-a^2}\right)=$

$=\frac{(a-b)^2+4ab}{a-b}:\frac{a(a-b)+2ab}{a^2-b^2}=$

$=\frac{a^2-2ab+b^2+4ab}{a-b}:\frac{a^2-ab+2ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2(a-b)(a+b)}{(a-b)a(a+b)}=$

$=\frac{(a+b)^2}{a}$.

Ответ: $\frac{(a+b)^2}{a}$.

88. $\frac{1}{3b-1}-\frac{27b^3-3b}{9b^2+1}\cdot\left(\frac{3b}{9b^2-6b+1}-\frac{1}{9b^2-1}\right)=$

$=\frac{1}{3b-1}-\frac{3b(9b^2-1)}{9b^2+1}\cdot\left(\frac{3b}{(3b-1)^2}-\frac{1}{(3b-1)(3b+1)}\right)=$

$=\frac{1}{3b-1}-\frac{3b(3b-1)(3b+1)}{9b^2+1}\cdot\frac{3b(3b+1)-(3b-1)}{(3b-1)^2(3b+1)}=$

$=\frac{1}{3b-1}-\frac{3b}{9b^2+1}\cdot\frac{9b^2+3b-3b+1}{3b-1}=\frac{1}{3b-1}-\frac{3b}{3b-1}=\frac{1-3b}{3b-1}=-1.$

Ответ: -1.

89. $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right)=$

$=\frac{3}{2a-3}-\frac{2a(4a^2-9)}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{(2a-3)^2}-\frac{3}{(2a-3)(2a+3)}\right)=$

$$= \frac{3}{2a-3} - \frac{2a(2a-3)(2a+3)}{4a^2+9} \cdot \frac{2a(2a+3)-3(2a-3)}{(2a-3)^2(2a+3)} =$$

$$= \frac{3}{2a-3} - \frac{2a(4a^2+6a-6a+9)}{(4a^2+9)(2a-3)} = \frac{3}{2a-3} - \frac{2a}{2a-3} = \frac{3-2a}{2a-3} = -1.$$

Ответ: -1.

90. $\left(\frac{2x}{x+1} + \frac{3}{x-4} - \frac{6-4x}{x^2-3x-4}\right) : \frac{2x-3}{x} =$

$$= \left(\frac{2x}{x+1} + \frac{3}{x-4} - \frac{6-4x}{(x+1)(x-4)}\right) \cdot \frac{x}{2x-3} =$$

$$= \frac{2x(x-4)+3(x+1)-(6-4x)}{(x+1)(x-4)} \cdot \frac{x}{2x-3} = \frac{2x^2-x-3}{(x+1)(x-4)} \cdot \frac{x}{2x-3} =$$

$$= \frac{(x+1)(2x-3)x}{(x+1)(x-4)(2x-3)} = \frac{x}{x-4}.$$

Ответ: $\frac{x}{x-4}$.

91. $\frac{2x-5}{x} : \left(\frac{2x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{21-3x}{(x+3)(x-2)}\right) =$

$$= \frac{(2x-5)}{x} : \frac{\left(2x(x-2)+2(x+3)-(21-3x)\right)}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{2x-5}{x} : \frac{2x^2+x-15}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{2x-5}{x} \cdot \frac{(x+3)(x-2)}{(2x-5)(x+3)} = \frac{x-2}{x}.$$

Ответ: $\frac{x-2}{x}$.

92. $\left(\frac{1}{a+2} + \frac{5}{(a+2)(a-3)} + \frac{2a}{a-3}\right) \cdot \frac{a}{2a+1} =$

$$= \frac{a-3+5+2a^2+4a}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{2a+1} = \frac{2a^2+5a+2}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{2a+1} =$$

$$= \frac{(2a+1)(a+2)}{(a+2)(a-3)} \cdot \frac{a}{(2a+1)} = \frac{a}{a-3}.$$

Ответ: $\frac{a}{a-3}$.

93. $\left(\dfrac{2}{b+1}+\dfrac{10}{(b+1)(b-4)}+\dfrac{3b}{b-4}\right):\dfrac{3b+2}{3}=$

$=\dfrac{2b-8+10+3b^2+3b}{(b-4)(b+1)}\cdot\dfrac{3}{3b+2}=\dfrac{3b^2+5b+2}{(b-4)(b+1)}\cdot\dfrac{3}{3b+2}=$

$=\dfrac{(3b+2)(b+1)}{(b-4)(b+1)}\cdot\dfrac{3}{3b+2}=\dfrac{3}{b-4}.$

Ответ: $\dfrac{3}{b-4}$.

94. $\left(\dfrac{m^2+3m}{m^2+3m+2}-\dfrac{m^2-2m}{m^2-2m-3}\right):\dfrac{1}{m^2-m-6}-\dfrac{5}{m+1}=$

$=\left(\dfrac{m(m+3)}{(m+1)(m+2)}-\dfrac{m(m-2)}{(m-3)(m+1)}\right)\cdot(m-3)(m+2)-\dfrac{5}{m+1}=$

$=\dfrac{m(m+3)(m-3)(m+2)}{(m+1)(m+2)}-\dfrac{m(m-2)(m-3)(m+2)}{(m-3)(m+1)}-\dfrac{5}{m+1}=$

$=\dfrac{m^3-9m-m^3+4m}{m+1}-\dfrac{5}{m+1}=-\dfrac{5m}{m+1}-\dfrac{5}{m+1}=-5.$

Ответ: -5.

95. $\left(\dfrac{m(m+3)}{(m-1)(m+4)}-\dfrac{m(m-4)}{(m-1)(m-3)}\right)\cdot\dfrac{(m-3)(m+4)}{m}=$

$=\dfrac{m(m+3)(m-3)(m+4)}{(m-1)(m+4)\cdot m}-\dfrac{m(m-4)(m-3)(m+4)}{(m-1)(m-3)\cdot m}=$

$=\dfrac{m^2-9}{m-1}-\dfrac{m^2-16}{m-1}=\dfrac{7}{m-1}.$

Ответ: $\dfrac{7}{m-1}$.

96. $mn^2-n^2+mn-n=n^2(m-1)+n(m-1)=(n^2+n)(m-1)=$
$=n(n+1)(m-1).$

Ответ: $n(n+1)(m-1)$.

97. $\dfrac{3x^2+7x-6}{x^2-9}=\dfrac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{3x-2}{x-3}.$

Ответ: $\dfrac{3x-2}{x-3}$.

98. $\frac{1}{xy}\cdot\left(x^3y-2xy^3-x^2y^2\right)=\frac{1}{xy}\cdot xy\left(x^2-xy-2y^2\right)=x^2-xy-2y^2=$
$=x^2-2xy+xy-2y^2=x(x-2y)+y(x-2y)=(x+y)(x-2y).$

Ответ: $(x+y)(x-2y)$.

99. $\frac{1}{xy}\cdot\left(x^3y-3xy^3+2x^2y^2\right)=\frac{1}{xy}\cdot xy\left(x^2-3y^2+2xy\right)=x^2+2xy-3y^2=$
$=x^2+3xy-xy-3y^2=x(x+3y)-y(x+3y)=(x-y)(x+3y).$

Ответ: $(x-y)(x+3y)$.

100. Так как $(2x^2+3y+x+5)^2\geqslant 0$ и $(y+3-2x)^2\geqslant 0$, то наименьшее значение выражения $(2x+3y+x+5)+(y+3-2x)^2$ будет равно нулю тогда и только тогда, когда $\begin{cases}2x^2+3y+x+5=0,\\ y+3-2x=0.\end{cases}$

Тогда $\begin{cases}2x^2+3y+x+5=0,\\ y=2x-3;\end{cases}\Leftrightarrow\ 2x^2+3(2x-3)+x+5=0\ \Leftrightarrow$

$2x^2+7x-4=0.\ \ x_1=\frac{1}{2}=0{,}5;\, x_2=-4.\ \ y_1=-2;\, y_2=-11.$

Ответ: $0;\ x_1=0{,}5;\ y_1=-2;\ x_2=-4;\ y_2=-11.$

101. При любых значениях x и y $(7x-3y+11)^2+(2x+6y-14)^2\geqslant 0$. Значит, наименьшее значение выражения $(7x-3y+11)^2+(2x+6y-14)^2-5$ равно -5. Оно достигается только в том случае, когда $7x-3y+11$ и $2x+6y-14$ равны нулю одновременно.

Составим и решим систему уравнений:
$\begin{cases}7x-3y+11=0,\\ 2x+6y-14=0;\end{cases}\Leftrightarrow x=-0{,}5,\, y=2{,}5.$

Таким образом, наименьшее значение выражения равно -5, оно достигается при $x=-0{,}5$ и $y=2{,}5$.

Ответ: $-5;\ x=-0{,}5,\ y=2{,}5.$

102. Так как $(17-4x-5y)^2\geqslant 0$ и $(3x-y-4{,}2)^2\geqslant 0$, то наименьшее значение выражения $(17-4x-5y)^2+(3x-y-4{,}2)^2+3$ будет равно 3 тогда и только тогда, когда $\begin{cases}17-4x-5y=0,\\ 3x-y-4{,}2=0.\end{cases}$

Надо найти x и y, удовлетворяющие системе $\begin{cases}4x+5y=17,\\ 3x-y=4{,}2.\end{cases}$

Умножим второе уравнение этой системы на 5 и прибавим к первому. Получим $19x=38;\ x=2.$
Из второго уравнения системы $y=3x-4{,}2=3\cdot 2-4{,}2=1{,}8.$

Ответ: $3;\ x=2;\ y=1{,}8.$

103. Так как каждое слагаемое суммы — неотрицательное число, то сумма равна нулю только в том случае, когда $3x-5y-1$ и $x+4y-6$ равны нулю одновременно.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x-5y-1=0, \\ x+4y-6=0; \end{cases} \Leftrightarrow x=2,\ y=1.$$

Пара чисел $(2;1)$ — единственная, удовлетворяющая равенству $\sqrt{3x-5y-1}+\sqrt{x+4y-6}=0$.

Ответ: $(2;1)$.

104. Запишем условие задачи в виде равенства
$2+\sqrt{2a-3b-1}=\sqrt{4-(a-2b)^2}$.
Поскольку $\sqrt{2a-3b-1}\geqslant 0$ и $(a-2b)^2\geqslant 0$, то левая часть этого равенства не меньше двух, а правая — не больше 2. Равенство верно, когда обе его части равны 2, то есть при $\begin{cases} 2a-3b-1=0, \\ a=2b; \end{cases} \Leftrightarrow b=1,\ a=2.$

Ответ: $(2;1)$.

105. $\dfrac{2}{x^2-x-12}+\dfrac{6}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{x+3}$,

$$\frac{2}{(x+3)(x-4)}+\frac{6}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{x+3}.$$

1) ОДЗ $x\neq -3$, $x\neq 4$, $x\neq -1$.
2) $2x+2+6x-24=x^2-3x-4$, $x^2-11x+18=0$, $x_1=9$, $x_2=2$.
Оба корня принадлежат ОДЗ.

Ответ: 9, 2.

106. $\dfrac{3}{x^2+4x-5}-\dfrac{5}{x^2-8x+7}=\dfrac{2}{x-1}$,

$$\frac{3}{(x-1)(x+5)}-\frac{5}{(x-1)(x-7)}=\frac{2}{x-1}.$$

ОДЗ: $x\neq 1$; $x\neq -5$; $x\neq 7$.
$3x-21-5x-25=2x^2-4x-70$; $2x^2-2x-24=0$; $x^2-x-12=0$; $x_1=-3$, $x_2=4$. Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $-3; 4$.

107. $\dfrac{3}{x^2+x-6}-\dfrac{2}{2x^2-5x+2}-\dfrac{x}{2x^2+5x-3}=0.$

Разложив знаменатели дробей на множители, запишем уравнение в виде

$$\frac{3}{(x+3)(x-2)}-\frac{2}{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\frac{x}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)}=0,$$

$$\frac{6\left(x-\frac{1}{2}\right)-2(x+3)-x(x-2)}{2(x+3)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=0;\ x+3\neq 0;\ x-2\neq 0;\ x-\frac{1}{2}\neq 0.$$

Умножив обе части уравнения на $2(x+3)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, получим $-x^2+6x-9=0;\ x^2-6x+9=0;\ (x-3)^2=0;\ x=3.$
При $x=3$ знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение, не равны нулю, поэтому $x=3$ — корень данного уравнения.

Ответ: 3.

108. Запишем уравнение в виде $\frac{x}{2+3x}+\frac{5}{2-3x}=\frac{15x+10}{(2-3x)(2+3x)}$.

ОДЗ: $2-3x\neq 0;\ 2+3x\neq 0$, то есть $x\neq\pm\frac{2}{3}$.

Умножим обе части уравнения на $(2-3x)(2+3x)\neq 0$:
$x(2-3x)+5(2+3x)=15x+10;\ 2x-3x^2+10+15x=15x+10;$
$3x^2-2x=0;\ \ x(3x-2)=0; x_1=0, x_2=\frac{2}{3}.$

Так как $x\neq\pm\frac{2}{3}$, то $x=\frac{2}{3}$ — посторонний корень. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Ответ: 0.

109. $2x^4-5x^3+2x^2-5x=0,\ x\left(2x^3-5x^2+2x-5\right)=0,\ x_1=0,$
$2x^3-5x^2+2x-5=0,\ x^2(2x-5)+(2x-5)=0,\ \left(x^2+1\right)(2x-5)=0,$
$x^2+1>0$ при всех $x\in R$; $2x-5=0,\ x_2=2{,}5.$

Ответ: 0; 2,5.

110. $2x^4+3x^3-8x^2-12x=0;\ \ x\left(2x^3+3x^2-8x-12\right)=0;\ \ x_1=0;$
$2x^3+3x^2-8x-12=0;\ \ x^2(2x+3)-4(2x+3)=0;\ \ \left(x^2-4\right)(2x+3)=0;$
$x^2-4=0;\ \ x_2=2, x_3=-2;\ \ 2x+3=0;\ \ 2x=-3;\ \ x_4=-1{,}5.$

Ответ: 0; 2; -2; $-1{,}5$.

111. $10x^4-45x=30x^2-15x^3;\ \ 10x^4+15x^3-30x^2-45x=0;$
$5x^3(2x+3)-15x(2x+3)=0;\ \ (2x+3)\left(5x^3-15x\right)=0;\ \ 2x+3=0;$
$x_1=-1{,}5;$

$5x^3-15x=0$; $5x(x^2-3)=0$; $x_2=0$; $x^2-3=0$; $x^2=3$; $x_3=-\sqrt{3}$, $x_4=\sqrt{3}$.

Ответ: $-1{,}5$; 0; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

112. $(x^2+3)^2+3=7x^3-7x^2+7x$; $x^4+6x^2+9+3-7x^3+7x^2-7x=0$; $x^4-7x^3+13x^2-7x+12=0$; $(x^4-7x^3+12x^2)+(x^2-7x+12)=0$; $x^2(x^2-7x+12)+(x^2-7x+12)=0$; $(x^2+1)(x^2-7x+12)=0$, $x^2+1>0$; $x^2-7x+12=0$.

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1=3$, $x_2=4$.

Ответ: 3; 4.

113. $5x^3+3x^2-5x-3=0$; $(5x^3+3x^2)-(5x+3)=0$; $x^2(5x+3)-(5x+3)=0$; $(5x+3)(x^2-1)=0$; $5x+3=0$; $x_1=-0{,}6$; $x^2-1=0$; $(x-1)(x+1)=0$; $x_2=1$, $x_3=-1$.

Ответ: $-0{,}6$; 1; -1.

114. $x^4+2x^3+2x^2+2x+1=0$; $(x^4+2x^3+x^2)+(x^2+2x+1)=0$; $x^2(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)=0$; $(x^2+1)(x+1)^2=0$, $x^2+1>0$; $(x+1)^2=0$; $x+1=0$; $x=-1$.

Ответ: -1.

115. $x^4+3x^3+3x^2+3x+2=0$;
$(x^4+2x^3+x^2)+(x^3+2x^2+x)+(2x+2)=0$;
$x^2(x^2+2x+1)+x(x^2+2x+1)+2(x+1)=0$;
$x^2(x+1)^2+x(x+1)^2+2(x+1)=0$; $(x+1)(x^2(x+1)+x(x+1)+2)=0$;
$x+1=0$, $x_1=-1$;
$x^3+x^2+x^2+x+2=0$; $(x^3+2x^2)+(x+2)=0$; $x^2(x+2)+(x+2)=0$; $(x+2)(x^2+1)=0$, $x^2+1>0$; $x+2=0$; $x_2=-2$.

Ответ: -1; -2.

116. $x^6-2x^4+4x^2-8=0$.
Замена $x^2=t$; $t\geqslant 0$. Получим
$t^3-2t^2+4t-8=0$; $t(t^2+4)-2(t^2+4)=0$; $(t^2+4)(t-2)=0$.
$t^2+4=0$ — действительных корней нет; $t-2=0$; $t=2$.
Вернёмся к замене: $x^2=2$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$.

117. $x^6-14x^4+56x^2-64=0$. Замена $x^2=t$, $t\geqslant 0$.
$t^3-14t^2+56t-64=0$,
$t^3-64-14t\cdot(t-4)=0$, $(t-4)\cdot(t^2+4t+16)-14t\cdot(t-4)=0$, $(t-4)\cdot(t^2+4t+16-14t)=0$, $(t-4)\cdot(t^2-10t+16)=0$, $(t-4)\cdot(t-8)\cdot(t-2)=0$, $t_1=4$, $t_2=8$, $t_3=2$.

Вернёмся к замене:
$x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$; $x^2 = 8$, $x_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$; $x^2 = 2$, $x_{5,6} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2}$; ± 2; $\pm 2\sqrt{2}$.

118. $(x^2 + 8x + 17)(x^2 - 4x + 7) = 3$. Рассмотрим
а) $y = x^2 + 8x + 17$; $x^2 + 8x + 17 = 0$; $D = 64 - 68 = -4$; $-4 < 0$. $x_0 = -\dfrac{8}{2} = -4$; $y_0 = 16 - 32 + 17 = 1$; $E(y) = [1; +\infty)$.
б) $y = x^2 - 4x + 7$; $x^2 - 4x + 7 = 0$; $D = 16 - 28 = -12$; $-12 < 0$. $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2$; $y_0 = 4 - 8 + 7 = 3$; $E(y) = [3; +\infty)$.

в) Запишем $x^2 + 8x + 17 = \dfrac{3}{x^2 - 4x + 7}$; $E(x^2 + 8x + 17) = [1; +\infty)$, $E\left(\dfrac{3}{x^2 - 4x + 7}\right) = (0; 1]$.

Общее значение только 1, но левая часть равна 1 при $x = -4$, а правая — при $x = 2$, то есть корней уравнение не имеет, следовательно, исходное уравнение корней не имеет, что и требовалось доказать.

119. $(x^2 - 6x + 10)(x^2 - 10x + 32) = 7$.
а) Рассмотрим $y = x^2 - 6x + 10$; $x^2 - 6x + 10 = 0$; $D = 36 - 40 = -4$; $-4 < 0$; $x_0 = 3$; $y_0 = 9 - 18 + 10 = 1$; $E(y) = [1; +\infty)$.
б) $y = x^2 - 10x + 32$; $x^2 - 10x + 32 = 0$; $D = 100 - 128 = -28$; $-28 < 0$; $x_0 = 5$; $y_0 = 25 - 50 + 32 = 7$; $E(y) = [7; +\infty)$.

в) Запишем в виде $x^2 - 6x + 10 = \dfrac{7}{x^2 - 10x + 32}$;

$E(x^2 - 6x + 10) = [1; +\infty)$; $E\left(\dfrac{7}{x^2 - 10x + 32}\right) = (0; 1]$.

Общее значение только 1, но левая часть равна 1 при $x = 3$, а правая — при $x = 5$. Следовательно, корней нет, что и требовалось доказать.

120. Преобразуем уравнение $\dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{x+1}$.

ОДЗ: $x \neq \pm 1$. Умножив обе части уравнения на $(x-1)^2(x+1)$, получим $3(x+1) - 2(x-1) = x^2 - 2x + 1$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Число $x_1 = -1$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением не является.

Ответ: 4.

121. Преобразуем уравнение к виду $\dfrac{4}{(x+3)^2} - \dfrac{6}{(3-x)(3+x)} = \dfrac{1}{x-3}$.

ОДЗ: $x \neq \pm 3$. Умножив обе части уравнения на $(x+3)^2(x-3)$, получим

$4(x-3)+6(x+3)=x^2+6x+9$; $x^2-4x+3=0$; $x_1=1$, $x_2=3$. Число $x_2=3$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением не является.

Ответ: 1.

122. Уравнение прямой, данной в условии задачи, можно записать в виде $y=2x-5$. Точка $(x;y)$ является точкой пересечения данных в условии прямой и параболы тогда и только тогда, когда $\frac{1}{3}x^2-2x+4=2x-5$. Решим последнее уравнение, умножив обе его части на 3 и применив теорему Виета: $x^2-6x+12=6x-15$; $x^2-12x+27=0$; $x_1=3$, $x_2=9$. Подставляя найденные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y=2x-5$, находим ординаты точек пересечения: $y_1=1$, $y_2=13$.

Ответ: $(3;1),(9;13)$.

123. Уравнение прямой, данной в условии задачи, можно записать в виде $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. Точка $(x;y)$ является точкой пересечения данных в условии прямой и параболы тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-7=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$. Решим последнее уравнение, умножив обе его части на 2 и применив теорему Виета: $x^2-5x-14=-3x+1$; $x^2-2x-15=0$; $x_1=-3$, $x_2=5$. Подставляя найденные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, находим ординаты точек пересечения: $y_1=5$, $y_2=-7$.

Ответ: $(-3;5)$, $(5;-7)$.

124. Легко видеть, что число 0 не входит в область определения уравнения. Умножив обе части уравнения на x^2, получим уравнение, равносильное данному, при условии $x^2\neq 0$: $x^4+2=3x^2$. Обозначив $t=x^2$, получаем уравнение $t^2-3t+2=0$, корнями которого являются $t_1=1$, $t_2=2$. Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2=1, \\ x^2=2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1, \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

и его целыми корнями являются $x_1=-1$ и $x_2=1$.

Ответ: -1; 1.

125. Уравнение параболы с вершиной в точке $(3;3)$ и старшим коэффициентом 1 может быть записано в виде $y=(x-3)^2+3=x^2-6x+12$. Чтобы найти абсциссы точек пересечения этой параболы с прямой $y=2x$, решим уравнение $x^2-6x+12=2x$; $x^2-8x+12=0$; $x_1=2$, $x_2=6$.

Подставляя полученные значения абсцисс точек пересечения в уравнение прямой $y = 2x$, находим ординаты точек пересечения: $y_1 = 4$, $y_2 = 12$.

Ответ: $(2;4)$, $(6;12)$.

126. Так как выражение x^2+2 не обращается в нуль, то, домножив на него обе части исходного уравнения, получим уравнение, равносильное данному: $x^2 - 10 + (x^2 - 2)(x^2 + 2) = x^2 + 2$; $x^4 - 4 = 12$; $x^4 - 16 = 0$; $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$; $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) = 0$; $x^2 + 4 > 0$, $x = \pm 2$.

Ответ: -2; 2.

127. Чтобы найти точки пересечения прямой и окружности, нужно решить систему $\begin{cases} y - x - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

Подставив $y = x + 3$ во второе уравнение, получаем $x^2 + (x + 3)^2 = 9$, $2x^2 + 6x + 9 = 9$, $2x^2 + 6x = 0$, $x(x + 3) = 0$. То есть абсциссы точек пересечения равны $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, а ординаты равны $y_1 = -3 + 3 = 0$, $y_2 = 0 + 3 = 3$.

Ответ: $(-3;0)$, $(0;3)$.

128. Преобразуем исходное уравнение: $(x - 3)^4 + 2(x - 3)^2 = 3$. Пусть $(x - 3)^2 = t \geqslant 0$, тогда получим квадратное уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$, $t_1 = -3$ — посторонний корень, $t_2 = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = -1, \\ x - 3 = 1, \end{array}\right.$

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Ответ: $2;4$.

129. Заметим, что $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Пусть $(x + 2)^2 = t \geqslant 0$, тогда имеем $t^2 + 3t - 4 = 0$, $t_1 = -4$ — посторонний корень, $t_2 = 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $(x + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x + 2 = -1, \\ x + 2 = 1, \end{array}\right.$ $x_1 = -3$, $x_2 = -1$.

Ответ: $-3; -1$.

130. Сделаем замену $\dfrac{(x^2 - 5)^2}{4} = t$; $t \geqslant 0$. Тогда $(t - 3)(t + 2) - 6 = 0$, $t^2 - t - 12 = 0$. Решение этого уравнения: $t_1 = 4$; $t_2 = -3$. Второе значение $t = -3$ не подходит, так как $t \geqslant 0$. Поэтому $t = 4$. Возвращаясь к неизвестной x, имеем $\dfrac{(x^2 - 5)^2}{4} = 4$; $(x^2 - 5)^2 = 16$. Отсюда $x^2 - 5 = 4$ или $x^2 - 5 = -4$. Решим первое уравнение: $x^2 = 9$, $x_{1,2} = \pm 3$. Решим второе уравнение: $x^2 = 1$, $x_{3,4} = \pm 1$.

Ответ: ± 1; ± 3.

131. Пусть $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = t$, $t \geqslant 0$. Тогда $\left(t - \dfrac{21}{8}\right)\left(t+5\right) - 3 = 0$; $8t^2 + 19t - 129 = 0$. Решая это уравнение, получим $t_1 = -\dfrac{43}{8}$, $t_2 = 3$. Значение $t = -\dfrac{43}{8}$ не подходит, так как $t \geqslant 0$. Подставим значение $t = 3$ в равенство $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = t$. Получим $\dfrac{(x^2-1)^2}{3} = 3$, $(x^2-1)^2 = 9$. Отсюда $x^2 - 1 = \pm 3$.

Значит, $x^2 = 4$ или $x^2 = -2$. Второе уравнение решений не имеет, а первое имеет два решения: $x_{1,2} = \pm 2$.

Ответ: ± 2.

132. Второе уравнение системы равносильно уравнению $(x-y)(x+y) = 0$. Поэтому исходная система уравнений равносильна двум системам уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 2y + 2 = 0, \\ x = y; \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0, D < 0$

$\Rightarrow$ действительных корней нет $\Rightarrow$ система не имеет решений;

2) $\begin{cases} x^2 + x - 2y + 2 = 0, \\ y = -x; \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0;\ x_1 = -1, x_2 = -2.$

Из второго уравнения системы получим $y_1 = 1, y_2 = 2$.

$(-1; 1)$ и $(-2; 2)$ — решения исходной системы.

Ответ: $(-1; 1)$, $(-2; 2)$.

133. Второе уравнение системы равносильно уравнению $(2x-y)(2x+y) = 0$. Поэтому исходная система уравнений равносильна двум системам уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 8 = 0, \\ 2x - y = 0; \end{cases} \quad x^2 - 4x + 2x + 8 = 0;\ x^2 - 2x + 8 = 0.\ D < 0,$

действительных корней нет $\Rightarrow$ система не имеет решений;

2) $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 8 = 0, \\ 2x + y = 0; \end{cases} \quad x^2 - 4x - 2x + 8 = 0;\ x^2 - 6x + 8 = 0;\ x_1 = 2,$

$x_2 = 4$. Из второго уравнения системы получим $y_1 = -4, y_2 = -8$. Таким образом, $(2; -4)$ и $(4; -8)$ — решения исходной системы.

Ответ: $(2; -4)$, $(4; -8)$.

134. Запишем уравнение в виде $x^2 + 2(2\sqrt{2} - 1)x + 2 + \sqrt{2} = 0$. Это квадратное уравнение. Его дискриминант $D = 4(2\sqrt{2}-1)^2 - 4(2+\sqrt{2}) = 4(7 - 5\sqrt{2})$. Так как $49 < 50$, то $7 < 5\sqrt{2}$. Поэтому $D = 4(7 - 5\sqrt{2}) < 0$ и уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: нет корней.

135. Представим данное уравнение в виде $x^2 + 2(1 - 2\sqrt{3})x + 7 = 0$. Определим знак дискриминанта:

$\frac{D}{4} = (1 - 2\sqrt{3})^2 - 7 = 1 - 4\sqrt{3} + 12 - 7 = 6 - 4\sqrt{3}$. Так как $6 - 4\sqrt{3} = \sqrt{36} - \sqrt{48} < 0$, то $D < 0$. Уравнение $4x\sqrt{3} - x^2 = 7 + 2x$ не имеет действительных корней.

Ответ: не имеет.

136. Запишем уравнение в виде $x^2+(3+2\sqrt{2})x+8{,}4 = 0$. Это квадратное уравнение. Его дискриминант $D = (3 + 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 8{,}4 =$
$= 17 + 12\sqrt{2} - 33{,}6 = 12\sqrt{2} - 16{,}6$. Так как $144 \cdot 2 > (16{,}6)^2 \Leftrightarrow 12\sqrt{2} > 16{,}6 \Leftrightarrow D = 12\sqrt{2} - 16{,}6 > 0$, то исходное уравнение имеет действительные корни.

Ответ: корни есть.

137. Представим данное уравнение в виде $(2 - \sqrt{3})x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$.

Определим знак дискриминанта:

$D = 3 - 4\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 3 - 8\sqrt{3} + 12 = 15 - 8\sqrt{3}$. Так как $15 - 8\sqrt{3} = \sqrt{225} - \sqrt{192} > 0$, то $D > 0$.

Уравнение $2x^2 = \sqrt{3}(x^2 + x - 1)$ имеет два различных действительных корня.

Ответ: 2.

138. 1) Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \sqrt{2} + 1 \approx 2{,}4$ (поскольку $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

2) Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$.

3) Запишем наше уравнение в виде $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Это приведённое квадратное уравнение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Наименьшую сумму корней имеет третье уравнение.

Ответ: 3.

139. $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

Решим систему способом подстановки:
$y = 1-2x, x^2-(1-2x)^2 = -5, x^2-1+4x-4x^2+5 = 0, -3x^2+4x+4 = 0.$
$\frac{D}{4} = 4 + 12 = 16, D > 0.$

$x_1 = \frac{-2+4}{-3} = -\frac{2}{3}, y_1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}; x_2 = \frac{-2-4}{-3} = 2, y_2 = 1 - 4 = -3.$

Ответ: $(2; -3)$, $\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

140. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ 3x - 7y = -29. \end{cases}$

Выразим из второго уравнения системы x через y и подставим в первое уравнение:

$x = \frac{7y-29}{3}; \frac{49y^2 - 406y + 841 + 9y^2}{9} = 29; 58y^2 - 406y + 841 = 29 \cdot 9;$

$2y^2 - 14y + 29 - 9 = 0; y^2 - 7y + 10 = 0; y_1 = 5, y_2 = 2; x_1 = \frac{35-29}{3} =$

$= \frac{6}{3} = 2, x_2 = \frac{14-29}{3} = -\frac{15}{3} = -5.$

Ответ: $(-5; 2)$, $(2; 5)$.

141. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, & (1) \\ xy = 1. & (2) \end{cases}$

Прибавим к первому уравнению системы второе, умноженное на 2:
$x^2 + 2xy + y^2 = 4, (x+y)^2 = 4, \left[\begin{array}{l} x + y = 2, \\ x + y = -2. \end{array}\right.$

Решение исходной системы свелось к решению двух систем уравнений:
$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = 1. \end{cases}$

Решая каждую из этих систем способом подстановки, получим $x_1 = 1$, $y_1 = 1, x_2 = -1, y_2 = -1$.

Ответ: $(1; 1)$, $(-1; -1)$.

142. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$

Заметим, что если $x = 0$ или $y = 0$, то $xy = 0$, что противоречит условию $xy = 2$, значит, $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ y = \dfrac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 = 3, \\ y = \dfrac{2}{x}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3, \\ y = \dfrac{2}{x}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы $x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3$.

Обозначим $x^2 = t$, $t > 0$. Уравнение примет вид

$t - \dfrac{4}{t} = 3$; $t^2 - 3t - 4 = 0$; $t_1 = 4, t_2 = -1$. Значение $t = -1$ не удовлетворяет условию $t > 0$.

Вернёмся к исходной переменной: $x^2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = -2$.

Так как $y = \dfrac{2}{x}$, то $y_1 = 1, y_2 = -1$.

Ответ: $(2; 1)$, $(-2; -1)$.

143. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3, \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3, \\ \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right) = 6; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x} = 5, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x} - 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, $x = \dfrac{2}{5}$, $y = 2$.

Ответ: $(0{,}4; 2)$.

144. Выразим из второго уравнения системы $y = x - 2$ и подставим в первое, получим уравнение

$$\frac{x+3}{x} - \frac{x+2}{x-1} = \frac{25}{2}.$$

Его ОДЗ: $x \neq 0$ и $x - 1 \neq 0$, то есть $x \neq 0$, $x \neq 1$. Умножив обе части полученного уравнения на $2x(x-1)$, будем иметь

$2(x+3)(x-1) - 2x(x+2) = 25x(x-1)$,

$2x^2 + 4x - 6 - 2x^2 - 4x = 25x^2 - 25x$, $25x^2 - 25x + 6 = 0$,

$x_{1,2} = \dfrac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{50} = \dfrac{25 \pm 5}{50}$, $x_1 = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$, $x_2 = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

Найденные корни удовлетворяют ОДЗ.

Далее находим $y_1 = x_1 - 2 = -1{,}6$ и $y_2 = x_2 - 2 = -1{,}4$. Таким образом, решением исходной системы будут две пары чисел $(0{,}4; -1{,}6)$ и $(0{,}6; -1{,}4)$.

Ответ: $(0{,}4; -1{,}6), (0{,}6; -1{,}4)$.

145. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 9, \\ 2x - y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 9, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)^2 - x^2 = 9, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 12x + 9 - x^2 - 9 = 0, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x = 0, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \cdot (x - 4) = 0, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4, \end{array} \right. \\ y = 2x - 3; \end{cases} \quad x_1 = 0, y_1 = -3; x_2 = 4, y_2 = 5.$

Ответ: $(0; -3)$, $(4; 5)$.

146. Сделаем замену в первом уравнении $t = \dfrac{x}{y}$ и получим $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{25}{12}$.

Решаем это уравнение и находим корни $t_1 = \dfrac{3}{4}$; $t_2 = \dfrac{4}{3}$. Выражаем y через x, подставляем во второе уравнение и получаем ответ.

Ответ: $(3; 4), (4; 3), (-3; -4), (-4; -3)$.

147. $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2,\ y_1 = 4;\ x_2 = -3,$

$y_2 = 9$.

Ответ: $(2; 4)$, $(-3; 9)$.

148. $\begin{cases} x^2 - 6x + y = 2, \\ y - \sqrt{x-3} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + 6x - x^2, \\ y = 9 + \sqrt{x-3}; \end{cases}$

$2 + 6x - x^2 = 9 + \sqrt{x-3}$, $6x - x^2 = 7 + \sqrt{x-3}$. $\quad$ (1)

Очевидно, что $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ 6x - x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leqslant x < 6$. Подбором находим, что $x = 4$ является корнем уравнения (1).

Функция $y = 7 + \sqrt{x-3}$ возрастает при $x \geqslant 3$. $y = 6x - x^2$ — график параболы с вершиной $(3; 9)$. При $x \geqslant 3$ $y = 6x - x^2$ убывает. Следовательно, на промежутке $3 \leqslant x < 6$ уравнение (1) имеет только один корень $x = 4$. Подставим $x = 4$ во второе уравнение системы и найдём y: $y = 10$.

Ответ: $(4; 10)$.

149. Пусть искомые числа x и y, $x < y$. Тогда $\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ \dfrac{x+y}{2} = y - 24. \end{cases}$

Выразим y из второго уравнения: $y = x + 48$ и подставим его в первое. Получим $\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ y - x = 48. \end{cases}$

1) $\sqrt{x^2 + 48x} = x + 12$. Перейдём к равносильной системе.

$\begin{cases} x + 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 48x = x^2 + 24x + 144; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -12, \\ x = 6; \end{cases} \quad x = 6.$

2) Находим значение второй переменной системы $y = 6 + 48 = 54$.

Итак, $\begin{cases} x = 6, \\ y = 54. \end{cases}$

Ответ: 6; 54.

150. $\begin{cases} 2x - \dfrac{12x + y}{8} = 3, \\ \dfrac{x - y}{2} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{y}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{12x}{8} - \dfrac{y}{8} = 3, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{1}{16} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{8} + 3, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{5y}{6} + \dfrac{1}{16} = 0. \end{cases}$

Подставив значение $\dfrac{x}{2}$ из первого уравнения системы во второе, получим

$\dfrac{y}{8} + 3 - \dfrac{5y}{6} + \dfrac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{17y}{24} + \dfrac{49}{16} = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{49}{16} \cdot \dfrac{24}{17} = \dfrac{147}{34}.$

Найденное значение y подставим в первое уравнение системы

$x = \dfrac{y}{4} + 6, x = \dfrac{147}{34 \cdot 4} + 6 = \dfrac{963}{136}.$

Ответ: $x = \dfrac{963}{136}$, $y = \dfrac{147}{34}$.

151. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{5} + 2x = 11, \\ \dfrac{3y}{5} + \dfrac{y - x}{15} = \dfrac{x}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2 + \dfrac{1}{5}\right)x + \dfrac{y}{5} = 11, \\ \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{15}\right)y - \left(\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{5}\right)x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{y}{11} + 5, \\ y = \dfrac{2x}{5}. \end{cases}$

Подставим значение y из второго уравнения системы в первое:

$x = -\frac{2x}{55} + 5;\ x = \frac{275}{57}$. Тогда $y = \frac{2x}{5} = \frac{110}{57}$.

Ответ: $x = \frac{275}{57},\ y = \frac{110}{57}$.

152. $\begin{cases} \frac{x-2y}{3} + \frac{11}{3} = 2x, \\ 2 + \frac{y-x}{4} = \frac{y}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - 2\right)x - \frac{2y}{3} = -\frac{11}{3}, \\ -\frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)y = -2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11-2y}{5}, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{3y}{28} = -2. \end{cases}$

Подставим полученное значение x из первого уравнения системы во второе: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2y-11}{5} + \frac{3y}{28} = -2 \Leftrightarrow -\frac{11}{20} + \frac{y}{10} + \frac{3y}{28} = -2 \Leftrightarrow \frac{29y}{140} =$

$= -2 + \frac{11}{20} \Rightarrow y = -7.$

Так как $x = \frac{11-2y}{5}$, то $x = \frac{11+14}{5} = 5.$

Ответ: $x = 5, y = -7$.

153. $\begin{cases} \frac{x+3y}{4} - \frac{15}{2} = -\frac{x}{2}, \\ \frac{5y}{2} + 3 = -\frac{x+y}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)x + \frac{3y}{4} = \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{5}x + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\right)y = -3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x = \frac{15}{2} - \frac{3}{4}y, \\ x + \frac{27}{2}y = -15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y, \\ 10 - y + \frac{27}{2}y = -15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ y = -2. \end{cases}$

Ответ: $x = 12,\ y = -2$.

154. 1. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

2. Преобразуем систему уравнений:

$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 7, \\ x + y + 5xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7xy, \\ 12xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{7}{12}, \\ xy=\frac{1}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{7}{12}-x, \\ 12x^2-7x+1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{7}{12}-x, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}, \\ x=\frac{1}{3}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{1}{3}, \\ x=\frac{1}{4}, \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{1}{4}, \\ x=\frac{1}{3}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$.

155. 1. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

2. Преобразуем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=6, \\ x+y+10xy=2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6xy, \\ 16xy=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{4}, \\ xy=\frac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ 8x^2-6x+1=0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, находим $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$. Значения неизвестной y соответственно равны $y_1 = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5$ и $y_2 = 0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25$.

Ответ: $(0{,}25; 0{,}5)$, $(0{,}5; 0{,}25)$.

156. $\begin{cases} 2x-6-4y-28=1, \\ 6-3x+7y-7=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=35, \\ -3x+7y=4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y=39, \\ -3x+7y=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=-3y+39, \\ -3x+7y=4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x=-3y+39, \\ -9y+117+7y=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-39, \\ y=\frac{113}{2}=56{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=130{,}5, \\ y=56{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $(130{,}5; 56{,}5)$.

157. $\begin{cases} 5x + 4y - 2x = 6, \\ x - 2y + 4x = -16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6, \\ 5x - 2y = -16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = -26, \\ 2y = 5x + 16; \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$

Ответ: $(-2; 3)$.

158. Выразим y через x из второго уравнения системы и подставим в первое:

1) $2x + y = -2 \Rightarrow y = -2 - 2x$.
2) $x^2 - y = x^2 + 2x + 2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$.
3) Решениями уравнения $x^2 + 2x = 0$ являются $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, которым соответствуют $y_1 = 2$; $y_2 = -2$.

Ответ: $(0; -2), (-2; 2)$.

159. Точки, у которых координаты x и y останутся неизменными, удовлетворяют уравнениям $x = x^2$ и $y = y^2$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = x^2, \\ y = y^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0, \\ y(y-1) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = 1; \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)$.

160. По теореме, обратной теореме Виета, x и y^2 удовлетворяют квадратному уравнению $z^2 - 7z + 12 = 0$. Откуда $x = 3$, $y^2 = 4$ или $x = 4$, $y^2 = 3$. Значит, решением системы являются пары $(3; 2), (3; -2), (4; \sqrt{3})$, $(4; -\sqrt{3})$.

Ответ: $(3; 2), (3; -2), (4; \sqrt{3}), (4; -\sqrt{3})$.

161. Точки, у которых координаты x и y останутся неизменными, удовлетворяют уравнениям $x = |x|$ и $y = |y|$. Получаем систему уравнений
$\begin{cases} x = |x|, \\ y = |y|; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Ответ: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

162. Пусть $\dfrac{1}{x+y} = b$, $\dfrac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} 9b + 2a = 3, \\ 18b - 5a = -3. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим $-9a = -9$; $a = 1$. Подставляя $a = 1$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $b = \frac{1}{9}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 5, y = 4$.

Ответ: $(5; 4)$.

163. Пусть $\frac{1}{x+y} = b$, $\frac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} 6b + 5a = 7, \\ 3b - 2a = -1. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим $9a = 9$; $a = 1$. Подставляя $a = 1$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $b = \frac{1}{3}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 2, y = 1$.

Ответ: $(2; 1)$.

164. Пусть $\frac{1}{x+y} = b$, $\frac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} 4a + 12b = 3, \\ 8a - 18b = -1. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, умноженное на 2, получим $-42b = -7$; $b = \frac{1}{6}$. Подставляя $b = \frac{1}{6}$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $a = \frac{1}{4}$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{6}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 5, y = 1$.

Ответ: $(5; 1)$.

165. Пусть $\dfrac{1}{x+y} = b$, $\dfrac{1}{x-y} = a$ $(x \neq \pm y)$, тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} 6a - 8b = -2, \\ 9a + 10b = 8. \end{cases}$

Умножив первое уравнение на 3 и вычитая из полученного уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получим $-44b = -22$; $b = \dfrac{1}{2}$. Подставляя $b = \dfrac{1}{2}$ в любое из уравнений последней системы, находим, что $a = \dfrac{1}{3}$. Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему методом сложения, получаем $x = 2{,}5$, $y = -0{,}5$.

Ответ: $(2{,}5; -0{,}5)$.

166. Из второго уравнения системы выразим y через x: $y = x - 7$ (1). Подставив выражение (1) в первое уравнение системы, получим $(3x - 7)^2 = 3x - 5$; $9x^2 - 42x + 49 = 3x - 5$; $9x^2 - 45x + 54 = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Из уравнения (1) находим, что значениям $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ соответствуют значения $y_1 = -5$, $y_2 = -4$.

Ответ: $(2; -5)$, $(3; -4)$.

167. $\begin{cases} (3x - y)^2 = 12 - 3x + y, \\ x + y = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x - 5 + x)^2 = 12 - 3x + 5 - x, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x - 5)^2 = 17 - 4x, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 - 36x + 8 = 0, \\ y = 5 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9x + 2 = 0 \\ y = 5 - x. \end{cases}$

Решением первого уравнения этой системы являются числа $x_1 = 0{,}25$; $x_2 = 2$. Подставляя найденные значения x во второе уравнение системы, получаем $y_1 = 4{,}75$, $y_2 = 3$.

Ответ: $(0{,}25; 4{,}75)$, $(2; 3)$.

168. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + 1 = \dfrac{6y}{x}, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Обозначим $\dfrac{x}{y} = t \, (x \neq 0, y \neq 0)$. Тогда $t^2 + t - 6 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = -3$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2y, \\ y = 3 - x, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3y, \\ y = 3 - x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4{,}5, \\ y = -1{,}5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2; 1)$, $(4{,}5; -1{,}5)$.

169. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + 3 = \dfrac{4y}{x}, \\ y - x = 5. \end{cases}$

Обозначим $\dfrac{x}{y} = t \, (x \neq 0, y \neq 0)$.

Тогда $t^2 + 3t - 4 = 0$; $t_1 = -4$, $t_2 = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4y, \\ y = 5 + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x = y, \\ y = 5 + x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 1)$.

170. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y - x}{xy} = 1, \\ y - x + 11xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = xy, \\ 12xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = \dfrac{1}{12}, \\ xy = \dfrac{1}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{12} + x, \\ 12x^2 + x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{12} + x, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}, \\ x = \dfrac{1}{4}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\dfrac{1}{4}, \\ x = -\dfrac{1}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \dfrac{1}{3}, \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

171. ОДЗ: $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y - x}{xy} = 2, \\ y - x - 10xy = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 2xy, \\ 8xy = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = \dfrac{1}{4}, \\ xy = \dfrac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{4} + x, \\ 8x^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, находим $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0{,}25$. Значения неизвестной y соответственно равны $y_1 = 0{,}25 - 0{,}5 = -0{,}25$; $y_2 = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$.

Ответ: $(-0{,}5; 0{,}25)$, $(0{,}25; 0{,}5)$.

172. Исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ 2x + y = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ 2x + y = -5; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 2x(5 - 2x) = 9, \\ y = 5 - 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2 + 2x(-5 - 2x) = 9, \\ y = -5 - 2x; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0, \\ y = 5 - 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 10x + 9 = 0, \\ y = -5 - 2x; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9, \\ y = -13, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9, \\ y = 13, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(-9; 13)$, $(-1; -3)$, $(1; 3)$, $(9; -13)$.

173. Исходная система равносильна совокупности двух систем
$\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = 6 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = -6. \end{cases}$

$$1)\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y - 5 = 0, \\ x = 6 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -5, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 7; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ x - y = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y - 5 = 0, \\ x = -6 + y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ x = -7, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5, \\ x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-7; -1), (-1; 5), (1; -5), (7; 1)$.

174. Пусть $t = \dfrac{x}{y}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$. Тогда первое уравнение исходной системы принимает вид $t + \dfrac{6}{t} - 5 = 0$; $t^2 - 5t + 6 = 0$; $t_1 = 2,\ t_2 = 3$. Следовательно, $x = 2y$ или $x = 3y$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 + 8y^2 - 3y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\sqrt{2}, \\ x = -2\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \sqrt{2}, \\ x = 2\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\begin{cases} x = 3y, \\ 9y^2 + 12y^2 - 3y^2 = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ x = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1, \\ x = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-3; -1), (3; 1), \left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right), \left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$.

175. Пусть $t = \dfrac{x}{y}$ $(x \neq 0, y \neq 0)$. Тогда первое уравнение исходной системы принимает вид $t - \dfrac{2}{t} - 1 = 0$; $t^2 - t - 2 = 0$; $t_1 = -1, t_2 = 2$.

Следовательно, $x = -y$ или $x = 2y$. Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases} x = -y, \\ y^2 + 5y^2 + 2y^2 = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y, \\ y^2 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2, \\ x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2, \\ x = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

2) $\begin{cases} x = 2y, \\ 4y^2 - 10y^2 + 2y^2 = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = -8. \end{cases}$

Эта система не имеет решений.

Ответ: $(2;-2), (-2;2)$.

176. $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x+y)(9x^2 - y^2) = 128; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x+y)^2(3x - y) = 128; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 8, \\ (3x+y)^2 = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 3x + y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 3x + y = -4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 6x = 12, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3x - 8, \\ 6x = 4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -2, \\ x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6, \\ x = \dfrac{2}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;-2), \left(\frac{2}{3};-6\right)$.

177. $\begin{cases} (x^2 - 4y^2)(x - 2y) = 640, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)^2(x+2y) = 640, \\ x + 2y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = 64, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2y = 8, \\ x = 10 - 2y, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2y = -8, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10 - 2y - 2y = 8, \\ x = 10 - 2y, \end{cases} \\ \begin{cases} 10 - 2y - 2y = -8, \\ x = 10 - 2y; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}, \\ x = 9, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4\dfrac{1}{2}, \\ x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(9;0{,}5), (1;4{,}5)$.

178. $\begin{cases} (x^2-y^2)(x-y)=81, \\ x+y=9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y)^2=81, \\ x+y=9; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=9, \\ x+y=9; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=-3, \\ x=9-y, \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=3, \\ x=9-y; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9-y-y=-3, \\ x=9-y, \end{cases} \\ \begin{cases} 9-y-y=3, \\ x=9-y; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=6, \\ x=3, \end{cases} \\ \begin{cases} y=3, \\ x=6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(6;3), (3;6)$.

179. $\begin{cases} (y^2-x^2)(y-x)=75, \\ x-y=-5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)^2(y+x)=75, \\ y-x=5; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y+x=3, \\ y-x=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4, \\ x=-1. \end{cases}$

Ответ: $(-1;4)$.

180. Первое уравнение системы выполняется только в том случае, когда $x-2=0$ или $y+1=0$. Получаем:

$$1) \begin{cases} x-2=0, \\ 6y^2+x-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ 6y^2-y-1=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}, \\ y=-\frac{1}{3}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Решением этой системы являются значения $x_1 = 2$; $y_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = 2$; $y_2 = -\frac{1}{3}$.

$$2) \begin{cases} y+1=0, \\ 6y^2+x-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ 7+x=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ x=-4. \end{cases}$$

Следовательно, решением исходной системы являются значения $x_1=2, y_1=\frac{1}{2}; x_2=2, y_2=-\frac{1}{3}; x_3=-4, y_3=-1$.

Ответ: $\left(2;\frac{1}{2}\right), \left(2;-\frac{1}{3}\right), (-4;-1)$.

181. $\begin{cases} x(x+y)=15, \\ y(x+y)=10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10. \end{cases}$

Суммируя уравнения системы, получим $x^2+2xy+y^2=25$, $(x+y)^2=25$. Тогда $x+y=5$ или $x+y=-5$.

1) $x+y=5$, $x=5-y$. Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получим $(5-y)(5-y+y)=15$, $5-y=3$, $y=2$. Тогда $x=5-2=3$.

2) $x+y=-5$, $x=-y-5$. Подставив полученное значение в первое уравнение системы, получим $(-y-5)(-y-5+y)=15$, $-y-5=-3$, $y=-2$. Тогда $x=-(-2)-5=-3$.

Ответ: $(3;2)$, $(-3;-2)$.

182. $x-2+\dfrac{6{,}25}{x+3}\leqslant 0$, $\dfrac{x^2+x+0{,}25}{x+3}\leqslant 0$, $\dfrac{(x+0{,}5)^2}{x+3}\leqslant 0$,

$\left[\begin{array}{l} x+0{,}5=0, \\ x+3<0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-0{,}5, \\ x<-3. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup\{-0{,}5\}$.

183. $x-2+\dfrac{2{,}25}{x+1}\leqslant 0$; $\dfrac{x^2-2x+x-2+2{,}25}{x+1}\leqslant 0$; $\dfrac{(x-0{,}5)^2}{x+1}\leqslant 0$;

$\left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x<-1. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\{0{,}5\}$.

184. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-20}}{4x+1}\geqslant\dfrac{\sqrt{x^2+x-20}}{2x+3}$. ОДЗ: $x\neq-\dfrac{1}{4}$; $x\neq-\dfrac{3}{2}$.

Рассмотрим два случая:

а) $x^2+x-20=0$. По теореме, обратной теореме Виета, $x_1=4$, $x_2=-5$. Числа -5 и 4 являются решениями данного неравенства).

б) $\begin{cases} x^2+x-20>0, \\ \dfrac{1}{4x+1}-\dfrac{1}{2x+3}\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x-4)>0 \text{ (см. рис. 125)}, \\ \dfrac{1-x}{(4x+1)(2x+3)}\leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-5, \\ x>4, \end{array}\right. \\ \dfrac{1-x}{8\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}\leqslant 0 \text{ (см. рис. 126)}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-5, \\ x>4, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-\frac{3}{2}, \\ -\frac{1}{4}<x\leqslant 1; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-5$.

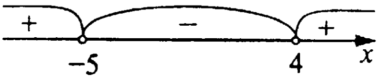


Рис. 125

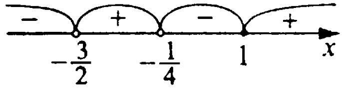


Рис. 126

Объединим решения, полученные в а) и б): $x \in (-\infty; -5] \cup \{4\}$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{4\}$.

185. $\dfrac{2x-1}{\sqrt{-x^2-0{,}5x+0{,}5}} \geqslant \dfrac{5x+1}{\sqrt{-x^2-0{,}5x+0{,}5}}$.

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 5x+1, \\ -x^2-0{,}5x+0{,}5>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x^2+0{,}5x-0{,}5<0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{2}{3}, \\ (x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leqslant -\frac{2}{3} \text{ (см. рис. 127).}$$

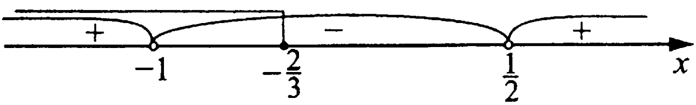


Рис. 127

Ответ: $\left(-1; -\dfrac{2}{3}\right]$.

186. $x^2+\dfrac{1}{x^2}>7$; $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}>9$; $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2>9$; $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|>3$. Получим $x+\dfrac{1}{x}>3$ или $x+\dfrac{1}{x}<-3$.

1) $x+\dfrac{1}{x}-3>0$; $\dfrac{x^2-3x+1}{x}>0$; $\dfrac{\left(x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{x}>0$;

$$\left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \quad \text{(см. рис. 128).}$$

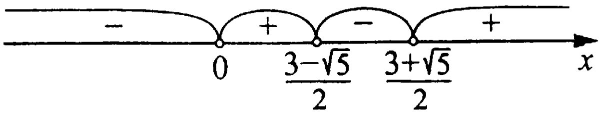


Рис. 128

2) $x+\frac{1}{x}+3<0$; $\frac{x^2+3x+1}{x}<0$; $\frac{\left(x-\frac{-3+\sqrt5}{2}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)}{x}<0$;

$\left[\begin{array}{l} x<\frac{-3-\sqrt5}{2}, \\ \frac{-3+\sqrt5}{2}<x<0 \end{array}\right.$ (см. рис. 129).

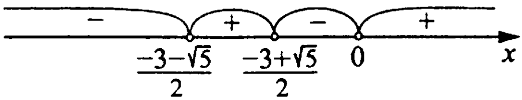


Рис. 129

Объединяя решения 1 и 2, имеем

$$\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt5}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{3-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt5}{2};+\infty\right).$$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt5}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{3-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt5}{2};+\infty\right)$.

187. Преобразуем данное неравенство: $x^2+4+\frac{4}{x^2}<9$; $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2<3^2$.

Рассмотрим отдельно два случая: $x>0$ и $x<0$.

1) Так как при $x>0$ выполняется неравенство $x+\frac{2}{x}>0$, то

$0<x+\frac{2}{x}<3 \Leftrightarrow x^2-3x+2<0$; $x\in(1;2)$.

2) При рассмотрении случая $x<0$ достаточно заметить, что функция $y=x+\frac{2}{x}$ нечётна, и, значит, решением неравенства $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2<3^2$ на отрицательной полуоси будет множество $(-2;-1)$, симметричное множеству $(1;2)$ относительно нуля.

Ответ: $(-2;-1)\cup(1;2)$.

188. $(x^4-4x^3+4x^2)-1\leqslant 0$; $(x^2-2x)^2\leqslant 1$; $|x^2-2x|\leqslant 1$;

$\begin{cases} x^2-2x \geqslant -1, \\ x^2-2x \leqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2 \geqslant 0, \\ x^2-2x-1 \leqslant 0; \end{cases}$ $1-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{2}.$

$x^4-4x^3+4x^2-1 \leqslant 0$, $\left(x^4-1\right)-4x^2(x-1) \leqslant 0$,

$\left(x^2+1\right)(x-1)(x+1)-4x^2(x-1) \leqslant 0$, $(x-1)\left(\left(x^2+1\right)(x+1)-4x^2\right) \leqslant 0$,

$(x-1)\left(x^3+x^2+x+1-4x^2\right) \leqslant 0$, $(x-1)\left(x^3-3x^2+x+1\right) \leqslant 0$,

$(x-1)\left(x^3-x^2-x^2+x-x^2+1\right) \leqslant 0$,

$(x-1)\left(x^2(x-1)-x(x-1)-(x-1)(x+1)\right) \leqslant 0$,

$(x-1)(x-1)\left(x^2-2x-1\right) \leqslant 0$, $(x-1)^2\left(x^2-2x-1\right) \leqslant 0$;

$x^2-2x-1=0$, $x_{1,2}=1 \pm \sqrt{1+1}=1 \pm \sqrt{2}$;

$(x-1)^2\left(x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right) \leqslant 0$; $1-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{2}$ (см. рис. 130).

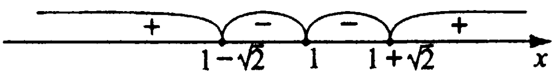


Рис. 130

Ответ: $\left[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right]$.

189. $\left(x^4-6x^3+9x^2\right)-4 \leqslant 0$; $\left(x^2-3x\right)^2 \leqslant 4$;

$\left|x^2-3x\right| \leqslant 2$; $\begin{cases} x^2-3x \geqslant -2, \\ x^2-3x \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1, \\ x \geqslant 2, \end{array}\right. \\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}; \end{cases}$

$\left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}; 1\right] \cup \left[2; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$ (см. рис. 131).

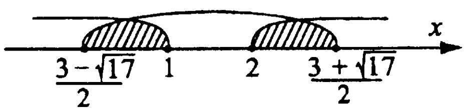


Рис. 131

Ответ: $\left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}; 1\right] \cup \left[2; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$.

190. $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+3} \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы.

1) $\dfrac{6-x}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow -3 < x \leqslant 6$ (см. рис. 132).

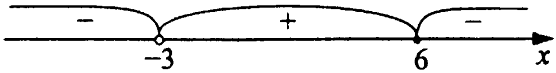


Рис. 132

2) $\dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} \leqslant 0$; $\dfrac{x+2}{2x} \leqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x < 0$ (см. рис. 133).

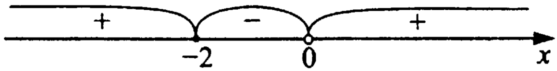


Рис. 133

3) Следовательно, $\begin{cases} -3 < x \leqslant 6, \\ -2 \leqslant x < 0. \end{cases}$ Откуда $-2 \leqslant x < 0$ (см. рис. 134).

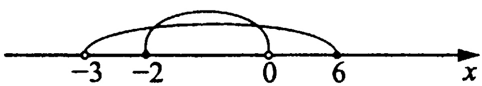


Рис. 134

Ответ: $[-2; 0)$.

191. Решим сначала первое неравенство, потом — второе и найдём общее решение.

1) $x^2 - 4x - 5 < 0$; $(x+1)(x-5) < 0$; $-1 < x < 5$.

2) $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4} \geqslant 0$; $\dfrac{4-x}{4x} \geqslant 0$; $\dfrac{x-4}{x} \leqslant 0$; $0 < x \leqslant 4$.

Следовательно, $0 < x \leqslant 4$ (см. рис. 135).

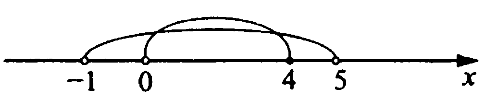


Рис. 135

Ответ: $(0; 4]$.

12. Зак. № 71

192. $\begin{cases} 2-\dfrac{3+2x}{3} > 1-\dfrac{x+6}{2}, \\ 3-\dfrac{x}{4} < x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-6-4x > 6-3x-18, \\ 12-x < 4x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 18, \\ x > 2{,}4; \end{cases} \Leftrightarrow 2{,}4 < x < 18.$

Ответ: $(2{,}4; 18)$.

193. $\begin{cases} 1-\dfrac{1-x}{2} < 4-\dfrac{5+5x}{3}, \\ 2-\dfrac{x+8}{4} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-3+3x < 24-10-10x, \\ 8-x-8 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x < 11, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{11}{13}, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

194. Выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих следующим условиям: $\begin{cases} 14x^2-3x-5 \geqslant 0, \\ x^3-x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{1}{2}; x \geqslant \dfrac{5}{7}, \\ x \neq -1; x \neq 0; x \neq 1. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\infty; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{7}; 1\right) \cup \left(1; +\infty\right)$.

195. Найдём область определения данного выражения:

$\begin{cases} 3x^2-20x-7 \geqslant 0, \\ 2x^2+5x \neq 0, \\ 3x-21 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-7)\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \geqslant 0, \\ x(2x+5) \neq 0, \\ x \neq 7; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\dfrac{1}{3}, \\ x \geqslant 7 \text{ (см. рис. 136)}, \end{array}\right. \\ x \neq 0,\ x \neq -2{,}5, \\ x \neq 7. \end{cases}$

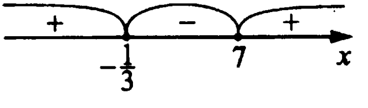


Рис. 136

Таким образом, $x \in (-\infty; -2{,}5) \cup \left(-2{,}5; -\frac{1}{3}\right] \cup (7; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2{,}5) \cup \left(-2{,}5; -\frac{1}{3}\right] \cup (7; +\infty)$.

196. Область определения данного выражения найдём из системы неравенств

$$\begin{cases} x^2-4x-21\geqslant 0, \\ x^2-25\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-7)\geqslant 0, \\ x^2\neq 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leqslant -3, \\ x\geqslant 7, \end{array}\right. \\ x\neq 5,\ x\neq -5. \end{cases}$$

Таким образом, $x\in(-\infty;-5)\cup(-5;-3]\cup[7;+\infty)$ (см. рис. 137).

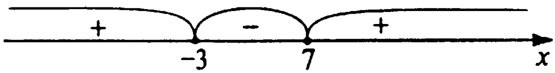


Рис. 137

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(-5;-3]\cup[7;+\infty)$.

197. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих условию $x^2-3x+2>0$; $(x-1)(x-2)>0$ (см. рис. 138). Следовательно, $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

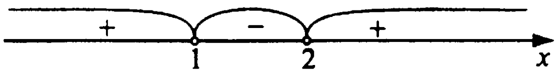


Рис. 138

Ответ: $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

198. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x+1\geqslant 0, \\ 14-3x\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2\geqslant 0, \\ x\neq \dfrac{14}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x\neq\frac{14}{3}.$$

Таким образом, область определения: $\left(-\infty;\dfrac{14}{3}\right)\cup\left(\dfrac{14}{3};+\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{14}{3}\right)\cup\left(\dfrac{14}{3};+\infty\right)$.

199. Исходное выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x+12-x^2\geqslant 0, \\ 4-x^2\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-4)\leqslant 0, \\ x^2\neq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 4, \\ x\neq 2,\ x\neq -2; \end{cases}$$

(см. рис. 139). Таким образом, $x\in[-3;-2)\cup(-2;2)\cup(2;4]$.

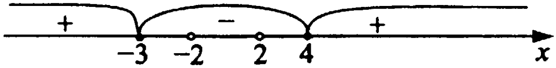


Рис. 139

Ответ: $[-3;-2)\cup(-2;2)\cup(2;4]$.

200. Выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0, \\ x^2-36\geqslant 0, \\ x^2-49\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 5, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -6, \\ x\geqslant 6, \end{array}\right. \\ x\neq 7,\ x\neq -7; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6\leqslant x<7, \\ x>7. \end{array}\right.$$

Ответ: $[6;7)\cup(7;+\infty)$.

201. Выражение $\dfrac{\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{7-x^2}}{5+x^3}$ имеет смысл при x, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{cases} 2-x\geqslant 0, \\ 7-x^2\geqslant 0, \\ 5+x^3\neq 0 \end{cases} \begin{cases} x\leqslant 2, \\ (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})\leqslant 0, \\ x\neq -\sqrt[3]{5}. \end{cases}$$

$-\sqrt{7}\leqslant x<-\sqrt[3]{5}$, $-\sqrt[3]{5}<x\leqslant 2$ (см. рис. 140).

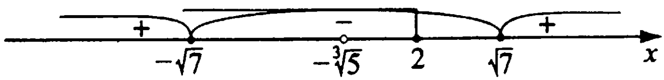


Рис. 140

Ответ: $\left[-\sqrt{7};-\sqrt[3]{5}\right)\cup\left(-\sqrt[3]{5};2\right]$.

202. Выражение $\sqrt{2x^2+9x-35}$ не имеет смысла, если $2x^2+9x-35<0$; $2(x+7)(x-2{,}5)<0$ (см. рис. 141); $-7<x<2{,}5$.

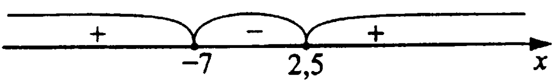


Рис. 141

Ответ: $(-7;2{,}5)$.

203. Выражение $\sqrt{16-2x-3x^2}$ имеет смысл, если $16-2x-3x^2\geqslant 0$; $3x^2+2x-16\leqslant 0$; $3(x-2)\left(x+2\frac{2}{3}\right)\leqslant 0$; $-2\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$ (см. рис. 142).

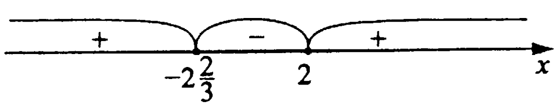


Рис. 142

Ответ: $\left[-2\frac{2}{3};2\right]$.

204. Выражение имеет смысл при x, удовлетворяющих условию

$$\frac{20x - 11x^2 - 3x^3}{x} \geqslant 0; \quad \frac{3x\left(x - \frac{4}{3}\right)(x+5)}{x} \leqslant 0; \quad x \in [-5; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right]$$

(см. рис. 143).

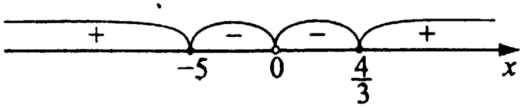


Рис. 143

Ответ: $[-5; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right]$.

205. Выражение имеет смысл при s, удовлетворяющих условию $11s - 6 - 3s^2 > 0$, $3s^2 - 11s + 6 < 0$.

Найдём корни уравнения

$3s^2 - 11s + 6 = 0$, $D = 121 - 72 = 49$, $D > 0$, $s_1 = \frac{11+7}{6} = 3$, $s_2 = \frac{11-7}{6} = \frac{2}{3}$, $3 \cdot \left(s - \frac{2}{3}\right) \cdot (s-3) < 0$, $\frac{2}{3} < s < 3$ (см. рис. 144).

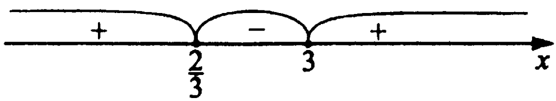


Рис. 144

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$.

206. Выражение не определено, если выполняются условия:

$$\left[\begin{array}{l} x + 3 = 0, \\ 2x^2 - 11x + 12 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ 2(x-4)(x-1{,}5) \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ 1{,}5 \leqslant x \leqslant 4; \end{array}\right.$$

(см. рис. 145).

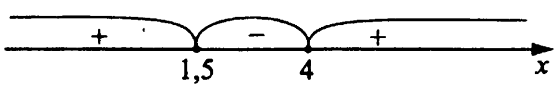


Рис. 145

Ответ: $\{-3\} \cup [1{,}5; 4]$.

207. Множеством значений x, при которых не определено данное в условии выражение, является решение совокупности $\left[\begin{array}{l} 4x^2 - 11x - 3 < 0, \\ x + 1 = 0, \\ 1 - \dfrac{6}{x+1} = 0. \end{array}\right.$

$$4x^2 - 11x - 3 = 0,\ x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{8} =$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{8} = \frac{11 \pm 13}{8},\ x_1 = -0{,}25,\ x_2 = 3.$$

Таким образом, полученная совокупность записывается в виде

$\left[\begin{array}{l} (x + 0{,}25)(x - 3) < 0, \\ x = -1, \\ \dfrac{x-5}{x+1} = 0; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x \in (-0{,}25; 3), \\ x = -1, \\ x = 5; \end{array}\right.$

$x \in \{-1\} \cup (-0{,}25; 3) \cup \{5\}$.

Ответ: $\{-1\} \cup (-0{,}25; 3) \cup \{5\}$.

208. Умножив третье неравенство системы на 2 и прибавив результат ко второму неравенству, получим $3y > 10$, $y > \dfrac{10}{3}$. Поскольку y должно быть целым, то $y \geqslant 4$. Аналогично из 1-го неравенства системы следует условие $y \leqslant 6$. То есть достаточно рассмотреть случаи $y = 4, y = 5, y = 6$.

1) При $y = 4$ из неравенства $x + y > 5 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \geqslant 2$. Но тогда $y - 2x \leqslant 4 - 2 \cdot 2 = 0$, то есть не выполнено второе неравенство системы. Следовательно, решений $(x; y)$ с ординатой $y = 4$ не существует.

2) При $y = 5$ из неравенства $x + y > 5 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \geqslant 1$. При $x = 1$ и $x = 2$ неравенство $y - 2x > 0$ выполнено, то есть точки $(1, 5)$, $(2, 5)$ являются решениями данной системы. При $x \geqslant 3$ неравенство $y - 2x > 0$ перестаёт выполняться, решений $(x; y)$ с ординатой $y = 5$ и абсциссой $x \geqslant 3$ не существует.

3) Случай $y = 6$ рассматривается аналогично:
$x + y > 5 \Rightarrow x \geqslant 0$, неравенство $y - 2x > 0$ выполнено при $x = 0, 1, 2$ и перестаёт выполняться при $x \geqslant 3$. То есть все решения системы с ординатой $y = 6$ — это точки $(0, 6)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$.

Поскольку все возможные случаи были рассмотрены, то других решений, кроме найденных, не существует.

Замечание. Для решения данной задачи можно было воспользоваться графическим методом, а именно, выполнив чертёж, содержащий в одной координатной плоскости прямые $y = 7$, $y - 2x = 0$, $x + y = 5$, отметить ту часть плоскости, точки которой удовлетворяют всем трём неравенствам системы (каждое из неравенств задаёт часть плоскости, расположенную по одну сторону от соответствующей прямой). При этом получится ограниченная область (треугольник), и все целочисленные решения (узлы координатной решётки) можно перечислить.

Во всяком случае, геометрические соображения будут полезны для нахождения ограничений на переменные x, y в случае более сложной системы такого типа.

Ответ: $(1,5)$, $(2,5)$, $(0,6)$, $(1,6)$, $(2,6)$.

209. $\begin{cases} y < 1, \\ y > x - 5, \\ y > 3 - 3x. \end{cases}$

Построим графики функций $y = 1$, $y = x-5$, $y = -3x+3$ (см. рис. 146). Решением системы неравенств является внутренняя область $\triangle ABC$. Целочисленные решения отмечены точками. Это $(2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$.

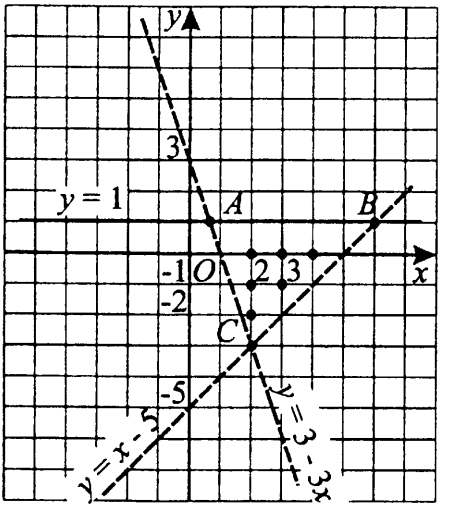


Рис. 146

Ответ: $(2; -2)$, $(2; -1)$, $(2; 0)$, $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(4; 0)$.

210. $\begin{cases} \dfrac{6-x}{2} - 4 < \dfrac{2+3x}{5} - 1, \\ x - \dfrac{6-x}{2} < \dfrac{x}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 5x - 40 < 4 + 6x - 10, \\ 6x - 18 + 3x < 2x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11x < 4, \\ 7x < 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{4}{11}, \\ x < \dfrac{18}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{11} < x < 2\frac{4}{7}.$$

0, 1, 2 — целые числа, удовлетворяющие системе неравенств.

Ответ: 0; 1; 2.

211. $$\begin{cases} \dfrac{6x+1}{3} - \dfrac{5x-1}{2} \leqslant \dfrac{10-x}{5}, \\ 3 - \dfrac{2x}{3} \geqslant 1 - \dfrac{x}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 60x + 10 - 75x + 15 \leqslant 60 - 6x, \\ 18 - 4x \geqslant 6 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 60x - 75x + 6x \leqslant 60 - 10 - 15, \\ -4x + x \geqslant 6 - 18; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x \leqslant 35, \\ -3x \geqslant -12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{35}{9}, \\ x \leqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow -3\frac{8}{9} \leqslant x \leqslant 4.$$

Целые числа, удовлетворяющие системе неравенств: $-3; -2; -1; 0;$ $1; 2; 3; 4$.

Ответ: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4.

212. $(x^2 - 3x + 2)^4 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_1 не является, а x_2 является его решением.

Ответ: 2.

213. $(x^2 - 13x + 42)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 42 = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = 7$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_2 не является, а x_1 является его решением.

Ответ: 6.

214. $(x^2 - 16x + 63)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 63 = 0$; $x_1 = 7$, $x_2 = 9$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_2 не является, а x_1 является его решением.

Ответ: 7.

215. $(x^2 - 4x + 3)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Подставляя полученные значения во второе неравенство системы, убеждаемся в том, что x_1 не является, а x_2 является его решением.

Ответ: 3.

216. 1) Первое неравенство системы эквивалентно уравнению

$$\frac{2}{x^2-2x-1}+2x^2-4x-7=0.$$

Преобразуем уравнение к виду $\dfrac{2}{x^2-2x-1}+2(x^2-2x-1)-5=0$ и сделаем замену $t=x^2-2x-1$, $t\neq 0$. Тогда уравнение примет вид $\dfrac{2}{t}+2t-5=0$;

$2t^2-5t+2=0$; $t_1=\dfrac{1}{2}$, $t_2=2$.

Если $t=\dfrac{1}{2}$, то $x^2-2x-1=\dfrac{1}{2}$; $x_1=1-\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$, $x_2=1+\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$.

Если $t=2$, то $x^2-2x-1=2$; $x_3=-1$, $x_4=3$.

2) $x^2-2x-3\geqslant 0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -1,\\ x\geqslant 3.\end{array}\right.$

3) Учитывая, что $2<\sqrt{10}<4$, получаем, что $1<\dfrac{1}{2}\sqrt{10}<2$. Таким образом, $-1<x_1<0$, $2<x_2<3$, следовательно, $x_1=1-\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$, $x_2=1+\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$ не являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы. Очевидно, что $x_3=-1$, $x_4=3$ являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы.

Ответ: $-1; 3$.

217. 1) Первое неравенство системы эквивалентно уравнению

$$2x^2-10x+9-\frac{2}{x^2-5x+6}=0.$$

Преобразуем уравнение к виду $2(x^2-5x+6)-\dfrac{2}{x^2-5x+6}-3=0$ и сделаем замену $t=x^2-5x+6$, $t\neq 0$. Тогда уравнение примет вид $2t-\dfrac{2}{t}-3=0$; $2t^2-3t-2=0$; $t_1=-\dfrac{1}{2}$, $t_2=2$.

Если $t=-\dfrac{1}{2}$, то $x^2-5x+6=-\dfrac{1}{2}$, решений нет.

Если $t=2$, то $x^2-5x+6=2$; $x_1=1$, $x_2=4$.

2) Решим неравенство $x^2-7x+10\leqslant 0\Leftrightarrow (x-2)(x-5)\leqslant 0\Leftrightarrow 2\leqslant x\leqslant 5$.

3) Очевидно, что $x_1=1$ не является решением второго неравенства, а зна-

чит, и решением системы; $x_2 = 4$ является решением второго неравенства, а значит, и решением системы.

Ответ: 4.

218. $\begin{cases} (x^2+5x)^2 - 12(x^2+5x) + 36 \leqslant 0, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+5x-6)^2 \leqslant 0, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6 = 0, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -6, \end{array}\right. \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -6, \\ (x^2-2x-15)^2 \leqslant 900; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

219. $\begin{cases} (x^2+3x-5)^2 - (10x^2+30x-50) + 25 \geqslant 0, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x-5)^2 - 10(x^2+3x-5) + 25 \geqslant 0, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+3x-10)^2 \geqslant 0, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -5, \end{array}\right. \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5, \\ (x^2-x-4)^2 \leqslant 625; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

220. Левая часть первого неравенства системы всегда неотрицательна. Значит, неравенство имеет решение тогда и только тогда, когда $(x-2)^2(x^2+2x-1)^2 = 0$. Произведение множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Таким образом, решением первого неравенства системы являются корни уравнений $x-2=0$ и $x^2+2x-1=0$: $x_1 = 2$, $x_2 = -1+\sqrt{2}$, $x_3 = -1-\sqrt{2}$. Из них только $x_2 = -1+\sqrt{2}$ удовлетворяет второму неравенству системы.

Ответ: $-1+\sqrt{2}$.

221. Левая часть первого неравенства системы всегда неотрицательна, так как $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$. Следовательно, x является решением первого неравенства тогда и только тогда, когда

$$(2x-1)^2(x^2+2x-4)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0, \\ x^2+2x-4=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0{,}5, \\ x=-1+\sqrt{5}, \\ x=-1-\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Подстановкой убеждаемся, что из чисел $0{,}5$; $-1+\sqrt{5}$; $-1-\sqrt{5}$ лишь последнее удовлетворяет второму неравенству системы.

Ответ: $-1-\sqrt{5}$.

222. Проведём следующие преобразования данного неравенства:

$$x^4-4x^3+4x^2 \geqslant 4;\ x^2(x^2-4x+4) \geqslant 4;\ x^2(x-2)^2 \geqslant 4.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x(x-2) \geqslant 2, \\ x(x-2) \leqslant -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x-2 \geqslant 0, \\ x^2-2x+2 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \big(x-(1-\sqrt{3})\big)\big(x-1-\sqrt{3}\big) \geqslant 0, \\ (x-1)^2+1 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1-\sqrt{3}, \\ x \geqslant 1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\big(-\infty; 1-\sqrt{3}\big] \cup \big[1+\sqrt{3}; +\infty\big)$.

223. Проведём следующие преобразования данного неравенства:

$$x^4-12x^3+36x^2 \geqslant 81;\ x^2(x^2-12x+36) \geqslant 81;\ x^2(x-6)^2 \geqslant 81.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x(x-6) \geqslant 9, \\ x(x-6) \leqslant -9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x-9 \geqslant 0, \\ x^2-6x+9 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3-3\sqrt{2}, \\ x \geqslant 3+3\sqrt{2}, \\ (x-3)^2 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 3-3\sqrt{2}, \\ x \geqslant 3+3\sqrt{2}, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\big(-\infty; 3-3\sqrt{2}\big] \cup \big[3+3\sqrt{2}; +\infty\big) \cup \{3\}$.

224. $(2x^2-x)^2<1 \Leftrightarrow |2x^2-x|<1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2-x<1, \\ 2x^2-x>-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2-x-1<0, \\ 2x^2-x+1>0; \end{array}\right. \Leftrightarrow -0{,}5<x<1.$$

Ответ: $(-0{,}5; 1)$.

225. $|x+1| \geqslant 0$, $|x| \geqslant 0$, поэтому равенство $|x+1|+|x|=0$ невозможно ($|x+1|$ и $|x|$ не обращаются в нуль одновременно). Следовательно, $|x+1|+|x|>0$ при всех x. Умножив обе части исходного неравенства на $|x+1|+|x|$, получим $(|x+1|-|x|)^2(|x+1|+|x|)^2<1$; $\big(|x+1|^2-|x|^2\big)^2<1$;

$\left((x+1)^2-x^2\right)^2<1;\ (2x+1)^2<1 \Leftrightarrow |2x+1|<1;\ \begin{cases}2x+1<1,\\2x+1>-1;\end{cases}$

$\begin{cases}x<0,\\x>-1.\end{cases}$

Ответ: $(-1;0)$.

226. $\begin{cases}\sqrt{x^2+4x+3}\geqslant 0,\\\sqrt{(x^2-5x+5)^2}\leqslant 1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x+3\geqslant 0,\\|x^2-5x+5|\leqslant 1;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x+3\geqslant 0,\\x^2-5x+5\geqslant -1,\\x^2-5x+5\leqslant 1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+4x+3\geqslant 0,\\x^2-5x+6\geqslant 0,\\x^2-5x+4\leqslant 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x+3)\geqslant 0,\\(x-2)(x-3)\geqslant 0,\\(x-1)(x-4)\leqslant 0;\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\leqslant -3,\\x\geqslant -1,\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}1\leqslant x\leqslant 2,\\3\leqslant x\leqslant 4;\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\leqslant x\leqslant 2,\\3\leqslant x\leqslant 4.\end{array}\right.$

Ответ: $[1;2]\cup[3;4]$.

227. $\begin{cases}\sqrt{5x+6-x^2}\geqslant 0,\\\sqrt{(x^2-8x+11)^2}\leqslant 4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+6-x^2\geqslant 0,\\|x^2-8x+11|\leqslant 4;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5x-6\leqslant 0,\\x^2-8x+11\geqslant -4,\\x^2-8x+11\leqslant 4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-6)(x+1)\leqslant 0,\\(x-5)(x-3)\geqslant 0,\\(x-1)(x-7)\leqslant 0;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-1\leqslant x\leqslant 6,\\\left[\begin{array}{l}x\leqslant 3,\\x\geqslant 5,\end{array}\right.\\1\leqslant x\leqslant 7;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-1\leqslant x\leqslant 6,\\\left[\begin{array}{l}1\leqslant x\leqslant 3,\\5\leqslant x\leqslant 7;\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\leqslant x\leqslant 3,\\5\leqslant x\leqslant 6.\end{array}\right.$

Ответ: $[1;3]\cup[5;6]$.

228. $\begin{cases}\sqrt{-x^2+3{,}5x+4{,}5}\geqslant 0,\\\sqrt{(x^2-7x+11)^2}\geqslant 1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{-x^2+3{,}5x+4{,}5}\geqslant 0,\\|x^2-7x+11|\geqslant 1;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-(x-4{,}5)(x+1)\geqslant 0,\\\left[\begin{array}{l}x^2-7x+11\leqslant -1,\\x^2-7x+11\geqslant 1;\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x-4{,}5)(x+1)\leqslant 0,\\\left[\begin{array}{l}(x-4)(x-3)\leqslant 0,\\(x-2)(x-5)\geqslant 0;\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-1\leqslant x\leqslant 4{,}5,\\\left[\begin{array}{l}3\leqslant x\leqslant 4,\\\left[\begin{array}{l}x\leqslant 2,\\x\geqslant 5;\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leqslant x\leqslant 2,\\3\leqslant x\leqslant 4.\end{array}\right.$

Ответ: $[-1;2]\cup[3;4]$.

229. $\begin{cases} \sqrt{-x^2-4{,}5x+5{,}5} \geqslant 0, \\ \sqrt{(x^2+6x+6{,}5)^2} \geqslant 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-4{,}5x+5{,}5 \geqslant 0, \\ |x^2+6x+6{,}5| \geqslant 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(x+5{,}5)(x-1) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+6x+6{,}5 \leqslant -1{,}5, \\ x^2+6x+6{,}5 \geqslant 1{,}5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5{,}5)(x-1) \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} (x+4)(x+2) \leqslant 0, \\ (x+1)(x+5) \geqslant 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5{,}5 \leqslant x \leqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} -4 \leqslant x \leqslant -2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -5, \\ x \geqslant -1; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5{,}5 \leqslant x \leqslant -5, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -4 \leqslant x \leqslant -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-5{,}5; -5] \cup [-4; -2] \cup [-1; 1]$.

230. 1) Сделаем замену в первом неравенстве системы: $t = x^2 - 4x - 3$, $t \neq 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 8 + \frac{16}{t^2} \leqslant 0$; $\left(t - \frac{4}{t}\right)^2 \leqslant 0$.

Следовательно, $t - \frac{4}{t} = 0$; $t^2 - 4 = 0$; $t_1 = -2$, $t_2 = 2$.

Если $t = -2$, то $x^2 - 4x - 3 = -2$; $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.

Если $t = 2$, то $x^2 - 4x - 3 = 2$; $x_3 = -1$, $x_4 = 5$.

2) $x^2 - 4x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant -1, \\ x \geqslant 5. \end{array}\right.$

3) Учитывая, что $2 < \sqrt{5} < 3$, получаем $-1 < x_1 < x_2 < 5$, следовательно, $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$ не являются решениями системы. Очевидно, что $x_3 = -1$, $x_4 = 5$ являются решениями второго неравенства, а значит, и решениями системы.

Ответ: -1; 5.

231. 1) Сделаем замену в первом неравенстве системы: $t = x^2 - 3x + 5$, $t \neq 0$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - 18 + \frac{81}{t^2} \leqslant 0$; $\left(t - \frac{9}{t}\right)^2 \leqslant 0$.

Следовательно, $t - \frac{9}{t} = 0$; $t^2 - 9 = 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = 3$.

Если $t = -3$, то $x^2 - 3x + 5 = -3$; решений нет.

Если $t = 3$, то $x^2 - 3x + 5 = 3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

2) $x^2 + x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 1$.

3) Очевидно, что $x_2 = 2$ не является решением второго неравенства, а $x_1 = 1$ является решением второго неравенства, а значит, и решением системы.

Ответ: 1.

232. 1) При $x^2-4\neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-4>0, \\ x^2+2x-15\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2)>0, \\ (x-3)(x+5)\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -5, \\ x\geqslant 3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -5, \\ x\geqslant 3. \end{array}\right.$$

2) При $x^2-4=0$ $x=\pm 2$ — данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $(-\infty;-5]\cup\{-2;2\}\cup[3;+\infty)$.

233. 1) При $9-x^2\neq 0$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 9-x^2>0, \\ x^2+x-2\leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(3+x)>0, \\ (x+2)(x-1)\leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<3, \\ -2\leqslant x\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 1.$$

2) При $9-x^2=0$ $x=\pm 3$ — данное в условии неравенство выполнено.

Ответ: $[-2;1]\cup\{-3;3\}$.

234. $\dfrac{x^2}{16}\leqslant\dfrac{3-2x}{3}\Leftrightarrow 3x^2\leqslant 48-32x\Leftrightarrow 3x^2+32x-48\leqslant 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x+12)\leqslant 0\Leftrightarrow -12\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left[-12;\dfrac{4}{3}\right]$.

235. $\dfrac{x^2}{8}\leqslant\dfrac{2-x}{3}\Leftrightarrow 3x^2\leqslant 16-8x\Leftrightarrow 3x^2+8x-16\leqslant 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3(x+4)\left(x-\frac{4}{3}\right)\leqslant 0\Leftrightarrow -4\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left[-4;\dfrac{4}{3}\right]$.

236. $\dfrac{x^2}{3}\leqslant\dfrac{5x-3}{4}\Leftrightarrow 4x^2\leqslant 15x-9\Leftrightarrow 4x^2-15x+9\leqslant 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-3)\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 3.$$

Ответ: $[0{,}75;3]$.

237. $\dfrac{x^2}{3}\geqslant\dfrac{x+14}{12}\Leftrightarrow 12x^2\geqslant 3x+42\Leftrightarrow 12x^2-3x-42\geqslant 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2-x-14\geqslant 0\Leftrightarrow 4(x+1{,}75)(x-2)\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\leqslant -1{,}75, \\ x\geqslant 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1{,}75]\cup[2;+\infty)$.

238. Условие, что разность дробей $\frac{58-5x}{3}$ и $\frac{2x+12}{2}$ неотрицательна, означает $\frac{58-5x}{3}-\frac{2x+12}{2}\geqslant 0 \Leftrightarrow 116-10x-6x-36\geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 80-16x\geqslant 0 \Leftrightarrow 16x\leqslant 80 \Leftrightarrow x\leqslant 5$. Наибольшее целое значение x, удовлетворяющее исходному условию, равно 5.

Ответ: 5.

239. Условие, что разность дробей $\frac{23-2x}{5}$ и $\frac{3x-11}{4}$ неположительна, означает $\frac{23-2x}{5}-\frac{3x-11}{4}\leqslant 0 \Leftrightarrow 92-8x-15x+55\leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 147-23x\leqslant 0 \Leftrightarrow 23x\geqslant 147 \Leftrightarrow x\geqslant 6\frac{9}{23}$.

Наименьшее целое значение x, удовлетворяющее условию, равно 7.

Ответ: 7.

240. Данное выражение определено, когда одновременно определены выражения $\sqrt{-15+13x-2x^2}$ и $\frac{1}{x^2-4}$.

Обозначим $-15+13x-2x^2=t$. Так как $\sqrt{t}$ имеет смысл при $t\geqslant 0$, то $-15+13x-2x^2\geqslant 0$; $-2(x-1{,}5)(x-5)\geqslant 0$; $(x-1{,}5)(x-5)\leqslant 0$; $x\in[1{,}5;5]$.

Дробь $\frac{1}{x^2-4}$ определена, если $x^2-4\neq 0$. $x^2\neq 4$; $x\neq -2$; $x\neq 2$. Следовательно, областью определения исходного выражения являются все значения $x\in[1{,}5;2)\cup(2;5]$.

Ответ: $[1{,}5;2)\cup(2;5]$.

241. Данное выражение определено, когда выполняется следующая система:

$$\begin{cases}24-2x-x^2\geqslant 0,\\ x^2-16\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2+2x-24\leqslant 0,\\ x^2\neq 16;\end{cases}\quad \begin{cases}-6\leqslant x\leqslant 4,\\ x\neq \pm 4.\end{cases}$$

Получаем $-6\leqslant x<-4$, $-4<x<4$.

Ответ: $-6\leqslant x<-4$, $-4<x<4$.

242. Данное выражение определено, когда выполняется следующая система:

$$\begin{cases}12-x-x^2\geqslant 0,\\ 9-x^2\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2+x-12\leqslant 0,\\ x^2\neq 9;\end{cases}\quad \begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 3,\\ x\neq \pm 3.\end{cases}$$

Получаем $-4\leqslant x<-3$, $-3<x<3$.

Ответ: $-4\leqslant x<-3$, $-3<x<3$.

243. 49,5; 47,7; ... Найти ближайший к нулю положительный член прогрессии.
$a_1 = 49{,}5$, $d = -1{,}8$.

1) Пусть n — номер искомого члена прогрессии. Тогда
$a_n = a_1 + d(n-1)$; $49{,}5 - 1{,}8 \cdot (n-1) = 0$; $1{,}8 \cdot (n-1) = 49{,}5$; $n - 1 = 27{,}5$; $n = 28{,}5$. Так как $n \in N$, то $n = 28$.

2) $a_{28} = 49{,}5 - 27 \cdot 1{,}8 = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

244. Определим разность прогрессии: $d = -40{,}2 + 41{,}4 = 1{,}2$. Возьмём $a_1 = -41{,}4$. Пусть a_n — наиболее близкий к нулю отрицательный член прогрессии. Тогда $\begin{cases} a_n < 0, \\ a_{n+1} \geqslant 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1 + d(n-1) < 0, \\ a_1 + dn \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -41{,}4 + 1{,}2n - 1{,}2 < 0, \\ -41{,}4 + 1{,}2n \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}2n < 42{,}6, \\ 1{,}2n \geqslant 41{,}4; \end{cases}$$
$$\begin{cases} n < 35{,}5, \\ n \geqslant 34{,}5. \end{cases}$$

Так как n — натуральное число, то $n = 35$. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ находим $a_{35} = -41{,}4 + 1{,}2 \cdot 34 = -0{,}6$.

Ответ: $-0{,}6$.

245. Определим разность арифметической прогрессии 101,1; 97,2; 93,3;...
$d = 97{,}2 - 101{,}1 = -3{,}9$. Возьмём $a_1 = 101{,}1$.
Пусть a_n — наиболее близкий к нулю отрицательный член прогрессии, тогда если $a_{n-1} \geqslant 0$, то $a_n < 0$ (учитывая, что арифметическая прогрессия убывающая).
$a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_n = 101{,}1 + 3{,}9 - 3{,}9n = 105 - 3{,}9n$;
$a_{n-1} = a_1 + d(n-2)$; $a_{n-1} = 101{,}1 + 7{,}8 - 3{,}9n = 108{,}9 - 3{,}9n$.
Решим систему неравенств

$$\begin{cases} a_n < 0, \\ a_{n-1} \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 105 - 3{,}9n < 0, \\ 108{,}9 - 3{,}9n \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 3{,}9n > 105, \\ 3{,}9n \leqslant 108{,}9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 26\dfrac{12}{13}, \\ n \leqslant 27\dfrac{12}{13}. \end{cases}$$

Так как n — натуральное число, то $n = 27$.
$a_{27} = 105 - 3{,}9 \cdot 27 = 105 - 105{,}3 = -0{,}3$.

Ответ: $-0{,}3$.

246. Высóты, на которые поднимался турист каждый час, образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 580, и разностью -40.

Пусть n — количество часов, через которое он достигнет высоты 2500 м, тогда по формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии получаем $\frac{(2 \cdot 580 - 40(n-1))n}{2} = 2500$. В результате получаем квадратное уравнение $20n^2 - 600n + 2500 = 0$. Решаем уравнение и находим корни $n = 5$ и $n = 25$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как $a_{25} = 580 - 40 \cdot 24 < 0$.

Замечание. Отметим, что эту задачу можно легко решить прикидкой.

Ответ: 5 ч.

247. По условию имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 0{,}75$; $d = 0{,}5$. Пусть n — количество выстрелов, при которых произошло попадание в мишень. Так как стрелок набрал 99,75 баллов, то

$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} = 99{,}75$; $\frac{2 \cdot 0{,}75 + 0{,}5(n-1)}{2} = 99{,}75$;

$n^2 + 2n - 399 = 0$; $n_1 = 19, n_2 = -21$.

Второй корень, очевидно, не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, 19 выстрелов увенчались попаданиями. Так как всего было произведено 30 выстрелов, то неудачными оказались $30 - 19 = 11$ из них.

Ответ: 11.

248. По условию $a_n = 6n$, $a_n \leqslant 170$, следовательно, $6n \leqslant 170$; $n \leqslant \frac{170}{6}$;

$n \leqslant 28\frac{1}{3}$.

Найдём сумму натуральных чисел, которые делятся на 6:

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, где $a_1 = 6$; $a_{28} = 6 \cdot 28$, $n = 28$.

$$S_{28} = \frac{6 + 6 \cdot 28}{2} \cdot 28 = (3 + 3 \cdot 28) \cdot 28 = 2436.$$

Ответ: 2436.

249. По условию $a_n = 8n$, $a_n \leqslant 200$, $8n \leqslant 200$, $n \leqslant 25$.

Найдём сумму 25 натуральных чисел, кратных 8:

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, где $a_1 = 8$, $a_{25} = 200$.

$$S_{25} = \frac{8 + 200}{2} \cdot 25 = \frac{208}{2} \cdot 25 = 104 \cdot 25 = 2600.$$

Ответ: 2600.

250. Из условия следует, что за 1 мин скорость увеличивается на 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Следовательно, получаем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 40 + 15 = 55$, $d = 15$. Тогда $a_7 = a_1 + 6d = 55 + 6 \cdot 15 = 145$.

Ответ: 145 км/ч.

251. Имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 5$, $d = 2$. Найдём n, при котором $S_n = 140$.

$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$; $\dfrac{10 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 140$; $n(4+n) = 140$;

$n^2 + 4n - 140 = 0$; $n_1 = 10$, $n_2 = -14$. Отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, следовательно, $n = 10$.

Ответ: 10 дней.

252. Согласно условию, имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 7$, $d = 7$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 370$:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $7 + 7(n-1) \leqslant 370$; $7n \leqslant 370$; $n \leqslant \dfrac{370}{7}$; $n \leqslant 52\dfrac{6}{7}$. Так как $n \in N$, то $n = 52$. Тогда сумма искомых чисел

$S_{52} = \dfrac{2a_1 + d(52-1)}{2} \cdot 52 = (2 \cdot 7 + 7 \cdot 51) \cdot 26 = (14 + 357) \cdot 26 = 371 \cdot 26 = 9646.$

Ответ: 9646.

253. Имеем арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 9$, $d = 9$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 400$:

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $9 + 9(n-1) \leqslant 400$; $9n \leqslant 400$; $n \leqslant \dfrac{400}{9}$; $n \leqslant 44\dfrac{4}{9}$. Так как $n \in N$, то $n = 44$. Следовательно, сумма искомых чисел

$S_{44} = \dfrac{2a_1 + d(44-1)}{2} \cdot 44 = (2 \cdot 9 + 9 \cdot 43) \cdot 22 = 9 \cdot 45 \cdot 22 = 8910.$

Ответ: 8910.

254. Числа, делящиеся на 2 и 3, то есть на 6, это 6; 12; 18; 24; ... Имеем арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 6$; $d = 6$.

Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n \leqslant 170$.

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $6 + 6n - 6 \leqslant 170$; $n \leqslant 28\dfrac{1}{3}$. Так как $n \in N$, то $n = 28$. Тогда сумма искомых чисел

$S_{28} = \dfrac{2a_1 + d(28-1)}{2} \cdot 28 = (2 \cdot 6 + 6 \cdot 27) \cdot 14 = 2436.$

Ответ: 2436.

255. Найдём сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, и вычтем из неё сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые делятся на 7. Так как все натуральные числа от 1 по 160 представляют собой арифметическую прогрессию с разностью 1, то сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 160, равна

$S_1 = \frac{1+160}{2} \cdot 160 = 12880$. Натуральные числа, делящиеся на 7, образуют арифметическую прогрессию с разностью 7. Первый член этой прогрессии равен 7, а последний, не превосходящий 160, равен 154. Таким образом, среди первых 160 натуральных чисел $\frac{154}{7} = 22$ числа, делящихся на 7. Поэтому сумма таких чисел равна

$S_2 = \frac{7+154}{2} \cdot 22 = 161 \cdot 11 = 1771$. Искомая сумма равна

$S_1 - S_2 = 12880 - 1771 = 11109$.

Ответ: 11109.

256. Определим разность прогрессии: $d = 78{,}3 - 84{,}1 = -5{,}8$. По условию $a_1 = 84{,}1$. Найдём наибольшее $n \in N$, при котором $a_n > 0$:
$a_n = a_1 + d(n-1)$; $84{,}1 - 5{,}8(n-1) > 0$; $84{,}1 - 5{,}8n + 5{,}8 > 0$; $5{,}8n < 89{,}9$; $n < 15{,}5$. Следовательно, искомое количество равно 15.

Ответ: 15.

257. Пусть a — первое из чисел, образующих данную арифметическую прогрессию. Тогда $a + d$, $a + 2d$ — второе и третье из этих чисел. По условию числа a^2, $(a+d)^2$, $(a+2d)^2$ образуют геометрическую прогрессию, а значит, знаменатель этой прогрессии $q = \frac{(a+d)^2}{a^2} = \frac{(a+2d)^2}{(a+d)^2}$;
$\left((a+d)^2\right)^2 = a^2(a+2d)^2$; $(a+d)^2 = |a \cdot (a+2d)|$. Учитывая, что $a > 0$, $a + 2d > 0$, имеем
$a^2 + 2ad + d^2 = a(a+2d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 2ad$; $d^2 = 0$; $d = 0$.

Ответ: 0.

258. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 27$. Так как $a_1 - 1$; $a_2 - 3$, $a_3 - 2$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 3)^2 = (a_1 - 1)(a_3 - 2)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда числа $a_2 = a_1 + d$ и $a_3 = a_1 + 2d$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27, \\ (a_1 + d - 3)^2 = (a_1 - 1) \cdot (a_1 + 2d - 2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ (9 - d + d - 3)^2 = (8 - d)(9 - d + 2d - 2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ 36 = (8 - d)(d + 7); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ d^2 - d - 20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -4, \\ d = 5; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 13, \\ d = -4, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 5. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 13, 9, 5 и 2) 4, 9, 14.

Ответ: $\{4, 9, 14\}$; $\{13, 9, 5\}$.

259. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 12$. Так как $a_1 + 1$; $a_2 + 2$; $a_3 + 11$ — геометрическая прогрессия, то её знаменатель $q = \dfrac{a_2 + 2}{a_1 + 1} = \dfrac{a_3 + 11}{a_2 + 2}$; $(a_2 + 2)^2 = (a_1 + 1)(a_3 + 11)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Значения d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12, \\ (a_1 + d + 2)^2 = (a_1 + 1) \cdot (a_1 + 2d + 11); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ (4 - d + d + 2)^2 = (4 - d + 1)(4 - d + 2d + 11); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ 36 = (5 - d)(15 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ d^2 + 10d - 39 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -13, \\ d = 3; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 17, \\ d = -13, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) 17, 4, −9 и 2) 1, 4, 7.

Ответ: $\{1, 4, 7\}$; $\{17, 4, -9\}$.

260. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 15$. Так как $a_1 + 1$, $a_2 + 1$, $a_3 + 4$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 + 1)^2 = (a_1 + 1)(a_3 + 4)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Значения a_1 и d найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15, \\ (a_1 + d + 1)^2 = (a_1 + 1)(a_1 + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ (5 - d + d + 1)^2 = (5 - d + 1)(5 - d + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ 36 = (6 - d)(9 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ d^2 + 3d - 18 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 5 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -6, \\ d = 3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 11, \\ d = -6, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) $11, 5, -1$ и 2) $2, 5, 8$.

Ответ: $\{11, 5, -1\}$ и $\{2, 5, 8\}$.

261. По условию задачи имеем: a_1, a_2, a_3 — арифметическая прогрессия, $a_1 + a_2 + a_3 = 30$. Так как a_1, $a_2 - 4$, $a_3 - 5$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2 - 4)^2 = a_1(a_3 - 5)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Значения d и a_1 найдём из системы

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 30, \\ (a_1 + d - 4)^2 = a_1(a_1 + 2d - 5); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ (10 - d + d - 4)^2 = (10 - d)(10 - d + 2d - 5); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ 36 = (10 - d)(d + 5); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ d^2 - 5d - 14 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -2, \\ d = 7; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 7. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют два набора чисел, удовлетворяющих условию задачи: 1) $3, 10, 17$ и 2) $12, 10, 8$.

Ответ: $\{3, 10, 17\}$ и $\{12, 10, 8\}$.

262. Пусть a_1, a_2, a_3 – члены данной арифметической прогрессии, d – её разность, b – первый член геометрической прогрессии. Так как по условию знаменатель геометрической прогрессии совпадает с её первым членом, то она имеет вид b, b^2, b^3.

Из условия имеем $a_1 = b$, $a_2 = b^2 + 1$, $a_3 = b^3$. Поскольку $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$; $a_1 + a_3 = 2a_2$, то $b + b^3 = 2(b^2 + 1)$; $b^3 - 2b^2 + b - 2 = 0$; $(b - 2)(b^2 + 1) = 0$; $b = 2$. Итак, $b = 2$, $a_1 = b = 2$, $a_2 = b^2 + 1 = 5$. Следовательно, $d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$.

Ответ: 3.

263. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии, b — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда согласно условию числа a_1, $a_2 - 1{,}5$, a_3 образуют геометрическую прогрессию, и $a_1 = 1{,}5b$; $a_2 = 1{,}5b^2 + 1{,}5$; $a_3 = 1{,}5b^3$. По свойству арифметической прогрессии $2a_2 = a_1 + a_3$, то есть $2(1{,}5b^2 + 1{,}5) = 1{,}5b^3 + 1{,}5b$; $b^3 - 2b^2 + b - 2 = 0$; $(b-2)(b^2+1) = 0$; $b = 2$. Итак, $a_1 = 1{,}5b = 3$; $a_2 = 1{,}5b^2 + 1{,}5 = 7{,}5$; $d = a_2 - a_1 = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

264. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_5$ — члены данной арифметической прогрессии, b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Тогда $a_1 = b$; $a_2 = bq$; $a_5 = bq^2$. Так как $a_2 = a_1 + d$, $a_5 = a_1 + 4d$, где d — разность арифметической прогрессии, то $a_5 - a_1 = 4(a_2 - a_1)$, то есть $bq^2 - b = 4(bq - b)$, $b(q-1)(q+1) = 4b(q-1)$; $b(q-1)(q-3) = 0$. Заметим, что $b \neq 0$; $q \neq 1$ (иначе арифметическая прогрессия не является возрастающей). Следовательно, $q = 3$. Итак, $a_1 = b$; $a_2 = bq = 3b = 3a_1$; $d = a_2 - a_1 = 3a_1 - a_1 = 2a_1$; $a_4 = a_1 + 3d = a_1 + 6a_1 = 7a_1$; $\dfrac{a_4}{a_1} = \dfrac{7a_1}{a_1} = 7$.

Ответ: 7.

265. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — члены данной арифметической прогрессии, b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Тогда $a_1 = b$; $a_2 = bq$; $a_7 = bq^2$. Так как $a_2 = a_1 + d$; $a_7 = a_1 + 6d$, где d — разность арифметической прогрессии, то $a_7 - a_1 = 6(a_2 - a_1)$, то есть $bq^2 - b = 6(bq - b)$; $b(q-1)(q+1) = 6b(q-1)$; $b(q-1)(q-5) = 0$. Заметим, что $b \neq 0$, $q \neq 1$ (иначе арифметическая прогрессия не является возрастающей). Следовательно, $q = 5$. Итак, $q = 5$; $a_2 = bq = 5b = 5a_1$; $d = a_2 - a_1 = 5a_1 - a_1 = 4a_1$; $a_5 = a_1 + 4d = a_1 + 16a_1 = 17a_1$; $\dfrac{a_5}{a_1} = \dfrac{17a_1}{a_1} = 17$.

Ответ: 17.

266. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_3 = 2d + a_1$; $a_6 = 5d + a_1$. Так как по условию $a_3 = 7$; $a_6 = 13$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2d + a_1 = 7, \\ 5d + a_1 = 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3d = 6, \\ a_1 = 7 - 2d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Тогда $a_8 = 7d + a_1 = 7 \cdot 2 + 3 = 17$, что соответствует условию. Следовательно, указанная в условии прогрессия существует.

Ответ: да.

267. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_4 = 3d + a_1$; $a_9 = 8d + a_1$. Так как по условию $a_4 = 8$; $a_9 = -7$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 3d + a_1 = 8, \\ 8d + a_1 = -7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = -15, \\ a_1 = 8 - 3d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -3, \\ a_1 = 17. \end{cases}$$

Следовательно, $a_{12} = 11d + a_1 = 11 \cdot (-3) + 17 = -16$. По условию $a_{12} = -17$. Значит, указанной в задаче прогрессии не существует.

Ответ: нет.

268. Пусть указанная прогрессия существует, a_1 — первый член этой прогрессии, d — её разность. Тогда $a_3 = 2d + a_1$; $a_8 = 7d + a_1$. Так как по условию $a_3 = -5$; $a_8 = 5$, то d и a_1 найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} 2d + a_1 = -5, \\ 7d + a_1 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = 10, \\ a_1 = 5 - 7d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = -9. \end{cases}$$

Следовательно, $a_{11} = 10d + a_1 = 10 \cdot 2 - 9 = 11$. По условию $a_{11} = 12$. Значит, указанной в задаче прогрессии не существует.

Ответ: нет.

269. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 24$. Так как a_1, $a_2 - 2$, $a_3 + 4$ — геометрическая прогрессия, то $(a_2-2)^2 = a_1(a_3+4)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$. Найдём значения a_1 и d из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 24, \\ (a_1 + d - 2)^2 = a_1(a_1 + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ (8 - d + d - 2)^2 = (8 - d)(8 - d + 2d + 4); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ 36 = (8 - d)(12 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ d^2 + 4d - 60 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -10, \\ d = 6; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 18, \\ d = -10, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 2, \\ d = 6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как по условию $a_1 > 3$, то искомые числа: 18, 8, −2.

Ответ: 18; 8; −2.

270. Пусть a_1, a_2, a_3 — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 18$. Так как $a_1 + 2$, a_2, $a_3 + 1$ — геометрическая прогрессия, то $a_2^2 = (a_1 + 2)(a_3 + 1)$. Пусть d — разность арифметической прогрессии, тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_1 + 2d$. Найдём значения a_1 и d из системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 18, \\ (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2)(a_1 + 2d + 1); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ (6 - d + d)^2 = (6 - d + 2)(6 - d + 2d + 1); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ 36 = (8 - d)(7 + d); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ d^2 - d - 20 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - d, \\ \left[\begin{array}{l} d = -4, \\ d = 5; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 10, \\ d = -4, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 5. \end{cases} \end{array} \right.$$

Так как по условию $a_3 < 3$, то искомые числа: 10; 6; 2.

Ответ: 10; 6; 2.

271. Предположим, что числа $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{8}$ могут быть членами арифметической прогрессии. Так как $\sqrt{3} < 2 < \sqrt{8}$, то в арифметической прогрессии они расположены либо в указанном в задаче порядке (при $d > 0$), либо в обратном порядке (при $d < 0$). Ограничимся первым случаем (второй аналогичен).

Не нарушая общности, можем считать, что $a_1 = \sqrt{3}$; $a_n = 2$; $a_m = \sqrt{8}$ $(n, m \in N; n < m; n, m \neq 1)$.

Тогда $2 = a_n = a_1 + (n-1)d = \sqrt{3} + (n-1)d$; $d = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{n-1}$;

$\sqrt{8} = a_m = a_1 + (m-1)d = \sqrt{3} + (m-1)d$; $d = \dfrac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{m-1}$.

Следовательно,

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{n-1} = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{m-1} \Leftrightarrow \frac{m-1}{n-1} = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{8} - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{8} - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = (\sqrt{8} - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3.$$

Так как $m, n \in N$; $m, n > 1$, то дробь $\dfrac{m-1}{n-1} \in Q$, и, значит, число $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 \in Q$. Покажем, что это неверно.

Если $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 \in Q$, то $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 3 = \dfrac{p_1}{q_1}$, где $p_1 \in Z$, $q_1 \in N$. Следовательно, $2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_1}{q_1} + 3\right) \in Q$.

Обозначим $\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1}+3\right)=\frac{p}{q}$, где $p\in Z$, $q\in N$. Тогда $2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}=\frac{p}{q}$;

$2\sqrt{2}+\sqrt{6}=\frac{p}{q}+\sqrt{3}$; $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2=\left(\frac{p}{q}+\sqrt{3}\right)^2$; $8+4\sqrt{12}+6=$

$=\frac{p^2}{q^2}+2\frac{p}{q}\cdot\sqrt{3}+3$; $8\sqrt{3}+11=\frac{p^2}{q^2}+\frac{2p}{q}\sqrt{3}$; $\sqrt{3}\left(8-\frac{2p}{q}\right)=\frac{p^2}{q^2}-11$;

$\sqrt{3}=\dfrac{\frac{p^2}{q^2}-11}{8-\frac{2p}{q}}\in Q$. Пусть $\sqrt{3}=\frac{r}{t}$, $r\in Z$, $t\in N$ и $\frac{r}{t}$ — несократимая дробь, тогда $\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{r}{t}\right)^2$; $3t^2=r^2$. Следовательно, $r^2\,\vdots\,3\Rightarrow r\,\vdots\,3\Rightarrow$ $r^2\,\vdots\,9\Rightarrow t^2\,\vdots\,3\Rightarrow t\,\vdots\,3\Rightarrow\frac{r}{t}$ — сократимая дробь. Пришли к противоречию.

Следовательно, число $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3\notin Q$, а значит, предположение о том, что данные числа могут быть членами арифметической прогрессии, неверно.

Ответ: нет.

272. Предположим, что числа $\sqrt{2}$, 3, $\sqrt{12}$ могут быть членами арифметической прогрессии. Так как $\sqrt{2}<3<\sqrt{12}$, то в арифметической прогрессии они расположены либо в указанном в задаче порядке (при $d>0$), либо в обратном порядке (при $d<0$). Не нарушая общности, можем считать, что $a_1=\sqrt{2}$; $a_n=3$; $a_m=\sqrt{12}$ (n, $m\in N$; $n<m$; n, $m\neq 1$). Тогда

$3=a_n=a_1+(n-1)d=\sqrt{2}+(n-1)d$; $d=\frac{3-\sqrt{2}}{n-1}$.

$\sqrt{12}=a_m=a_1+(m-1)d=\sqrt{2}+(m-1)d$; $d=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{m-1}$.

Следовательно,

$$\frac{3-\sqrt{2}}{n-1}=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{m-1}\Leftrightarrow\frac{m-1}{n-1}=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{12}-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{3\sqrt{12}-3\sqrt{2}+\sqrt{12\cdot 2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{9-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2}{7}.$$

Так как $m,n\in N$; $m,n>1$, то дробь $\frac{m-1}{n-1}\in Q$, значит, число

$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2}{7}\in Q$. Однако это неверно (докажите самостоятельно).

Следовательно, предположение о том, что данные числа могут быть членами арифметической прогрессии, неверно.

Ответ: нет.

273. Пусть a_n $(n \in N)$ — заданная арифметическая прогрессия, d — её разность. По условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 7, \\ a_1 + 4d = 13. \end{cases}$$

Отсюда $d = 3$, $a_1 = 1$. Следовательно, $a_2 = 4$; $a_6 = 16$. Легко увидеть, что числа 1, 4 и 16 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 4$.

Ответ: да.

274. Пусть a_n $(n \in N)$ — заданная арифметическая прогрессия, d — её разность. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 8, \\ a_1 + 7d = 33. \end{cases}$$

Отсюда $5d = 25$; $d = 5$; $a_1 = -2$. Следовательно, $a_2 = 3$; $a_4 = 13$; $a_6 = 23$. Предположим, что эти числа образуют геометрическую прогрессию. Обозначим $b_1 = a_3 = 3$; $b_2 = a_4 = 13$; $b_3 = a_6 = 23$ — члены этой прогрессии. Тогда должно выполняться равенство $\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_2}{b_1}$. Однако $\frac{23}{13} \neq \frac{13}{3}$. Следовательно, предположение о том, что второй, четвёртый и шестой члены заданной арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию, неверно.

Ответ: нет.

275. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_6$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $a_2 + a_4 + a_6 = 18$; $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = 120$. Тогда $a_2 = a_1 + d$; $a_4 = a_1 + 3d$; $a_6 = a_1 + 5d$. Значение чисел a_1 и d найдём из системы уравнений

$$\begin{cases} (a_1 + d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 18, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d)(a_1 + 5d) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ (6 - 3d + d)(6 - 3d + 3d)(6 - 3d + 5d) = 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ (6 - 2d)(6 + 2d) = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ 36 - 4d^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 6 - 3d, \\ \left[\begin{array}{l} d = 2, \\ d = -2. \end{array} \right. \end{cases}$$

Следовательно, $a_1 = 0$ или $a_1 = 12$.

Ответ: 0; 12.

276. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — члены заданной арифметической прогрессии. По условию $a_1 = -8$, $a_2 = -5$. Следовательно, разность этой прогрессии $d = a_2 - a_1 = -5 + 8 = 3$.

Пусть найдётся такое натуральное число n, что $a_n = 4$ есть n-й член данной прогрессии. Так как $a_n = (n-1)d + a_1$, то должно выполняться $4 = (n-1)\cdot 3 - 8$; $(n-1)\cdot 3 = 12$; $n - 1 = 4$; $n = 5$. Следовательно, число 4 является пятым членом заданной прогрессии.

Ответ: да.

277. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $3\cdot(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$.
Пусть d — разность данной прогрессии, тогда
$3(a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d) = a_1+5d+a_1+6d+a_1+7d+a_1+8d+$ $+a_1+9d$; $3(5a_1+10d) = 35d+5a_1$; $d = 2a_1$. Так как по условию $a_7 = 26$, то $a_1 + 6d = 6(2a_1) + a_1 = 13a_1 = 26$; $a_1 = 2$; $d = 2a_1 = 4$.
Следовательно, $a_3 = 2d + a_1 = 2\cdot 4 + 2 = 10$.

Ответ: 10.

278. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — члены данной арифметической прогрессии. По условию $2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = a_5 + a_6 + a_7$.
Пусть d — разность данной прогрессии, тогда
$2(a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1) = 4d+a_1+5d+a_1+6d+a_1$; $2(6d+4a_1) =$ $= 15d + 3a_1$; $d = \frac{5}{3}a_1$. Так как по условию $a_8 = 38$, то $7d + a_1 =$

$$= 7\cdot\frac{5}{3}a_1 + a_1 = \frac{38}{3}a_1 = 38;\ a_1 = 3;\ d = \frac{5}{3}a_1 = 5.$$

Следовательно, $a_2 = d + a_1 = 5 + 3 = 8$.

Ответ: 8.

279. Для решения задачи найдём сумму натуральных чисел от 100 до 150 включительно, затем сумму чисел в этом же диапазоне, делящихся на 6. Затем из первой суммы вычтем вторую.

Натуральные числа из диапазона от 100 до 150 включительно представляют собой арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 100$; $d = 1$. Число членов этой прогрессии равно $150 - 100 + 1 = 51$. Сумма первых 51 членов этой прогрессии $S_1 = \dfrac{(100+150)\cdot 51}{2} = 6375$.

Натуральные числа из диапазона от 100 до 150 включительно, которые делятся на 6, представляют собой арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 102$; $d = 6$, $a_n = 150$. Определим число членов этой прогрессии:

$n-1=\dfrac{150-102}{6}=8$; $n=9$. Сумма первых 9 членов рассматриваемой прогрессии $S_2=\dfrac{(102+150)\cdot 9}{2}=1134$. Разность сумм прогрессий равна $6375-1134=5241$.

Ответ: 5241.

280. $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{a_3}=\dfrac{a_1+\dfrac{a_1+a_3}{2}+2a_1}{2a_1}=\dfrac{a_1+\dfrac{a_1+2a_1}{2}+2a_1}{2a_1}=$

$=\dfrac{1+\dfrac{3}{2}+2}{2}=2{,}25.$

Ответ: 2,25.

281. По условию задачи $a_8=3a_6$. Тогда $a_7=\dfrac{a_6+a_8}{2}=2a_6$,

$d=a_8-a_7=a_6$. Так как, с другой стороны, $a_6=a_1+5d$, то получим $d=a_1+5d$, $a_1=-4d$.

Итак, $S_g=\dfrac{9\cdot(2a_1+8d)}{2}=\dfrac{9\cdot(2(-4d)+8d)}{2}=0.$

Ответ: 0.

282. Это задача на арифметическую прогрессию. По условию число отжиманий в первый день $a_1=10$, разность прогрессии $d=2$. Наша задача — найти сумму членов этой прогрессии с 19-го по 31-й, то есть $S_{31}-S_{18}$. Воспользуемся формулой $S_n=\dfrac{(2a_1+d(n-1))n}{2}$. Имеем

$S_{31}=\dfrac{(2\cdot 10+2(31-1))\cdot 31}{2}=1240$; $S_{18}=\dfrac{(20+2\cdot 17)\cdot 18}{2}=486.$

Искомая величина $S_{31}-S_{18}=1240-486=754$.

Ответ: 754.

283. Это задача на арифметическую прогрессию. По условию количество единиц продукции, произведённой в первом году, $a_1=50$, разность прогрессии $d=15$. Необходимо найти сумму членов прогрессии с 8-го по 20-й включительно, то есть $S_{20}-S_7$. Воспользуемся формулой $S_n=\dfrac{(2a_1+d(n-1))n}{2}$. Имеем $S_{20}=\dfrac{(2\cdot 50+15(20-1))\cdot 20}{2}=3850$;

$S_7=\dfrac{(2\cdot 50+15\cdot 6)\cdot 7}{2}=665.$

Искомая величина $S_{20} - S_7 = 3850 - 665 = 3185$.

Ответ: 3185.

284. По условию имеем арифметическую прогрессию $a_n = 3n + 2$; $a_1 = 5$, $d = 3$.

Составим новую арифметическую прогрессию из членов прогрессии a_n с нечётными номерами. Для новой прогрессии получим: $b_1 = a_1 = 5$, $d_b = 6$. Сумма членов исходной прогрессии с нечётными номерами, меньшими 50, равна сумме первых 25 членов полученной прогрессии.

Сумма 25 членов новой прогрессии

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 5 + 6 \cdot 24) \cdot 25}{2} = 1925.$$

Ответ: 1925.

285. По условию имеем арифметическую прогрессию $a_n = 4n - 3$, $a_1 = 1$, $d = 4$.

Составим новую арифметическую прогрессию из членов прогрессии a_n с чётными номерами. Для новой прогрессии получим $b_1 = a_2 = 5$, $d_b = 8$. Сумма членов исходной прогрессии с чётными номерами, не превосходящими 50, равна сумме первых 25 членов полученной прогрессии.

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 5 + 8 \cdot 24) \cdot 25}{2} = 2525.$$

Ответ: 2525.

286. Пусть a_1 — количество сантиметров, которое проползла гусеница за первую минуту, a_2 — за вторую и т. д. Тогда числа $a_1, a_2, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 39$ и $d = -2$.

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ — количество сантиметров, которое проползла гусеница за первые n минут. Требуется найти число n, при котором $S_n = 400$ см. Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}$. Получим $400 = \dfrac{\big(2 \cdot 39 - 2(n-1)\big)n}{2}$; $n^2 - 40n + 400 = 0$;

$(n - 20)^2 = 0$; $n = 20$.

Ответ: 20.

287. Пусть a_1 — количество очков, которое начислили стрелку за первое попадание, a_2 — за второе и т. д. Числа $a_1, a_2, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 4$ и $d = 2$. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ — количество начисленных очков за n попаданий. По условию $S_n = 180$, $n \leqslant 20$. Требуется найти $20 - n$.

Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}$. Получим

$180 = \dfrac{\big(2 \cdot 4 + 2(n-1)\big)n}{2}$; $n^2 + 3n - 180 = 0$; $n_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 27}{2}$, $n \in N$, $n = 12$; $20 - n = 20 - 12 = 8$.

Ответ: 8.

288. Запишем сначала сумму первых 17 членов нашей арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью $3d$:

$$S_{17} = \frac{(2a_1 + 3d(17-1)) \cdot 17}{2} = 17 \cdot (a_1 + 24d) = 17a_1 + 408d.$$

Затем запишем сумму первых 23 членов арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d:

$$S_{23} = \frac{(2a_1 + d(23-1)) \cdot 23}{2} = 23 \cdot (a_1 + 11d) = 23a_1 + 253d.$$

Запишем сумму первых 6 членов:

$$S_6 = \frac{(2a_1 + d(6-1)) \cdot 6}{2} = 6 \cdot \left(a_1 + \frac{5}{2}d\right) = 6a_1 + 15d.$$

Запишем их разность, то есть сумму членов с 7 по 23:
$S_{7-23} = S_{23} - S_6 = 17a_1 + 238d$.

По условию задачи $S_{17} - S_{7-23} = 153$. То есть $17a_1 + 408d - 17a_1 - 238d = 153$; $170d = 153$; $d = \dfrac{153}{170} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

289. Пусть S — искомая сумма, S_1 — сумма всех чётных натуральных чисел, которые не превосходят 241, S_2 — сумма всех чётных натуральных чисел, которые делятся на 10 и не превосходят 241, тогда $S = S_1 - S_2$. Найдём S_1: $S_1 = \dfrac{2 + 240}{2} \cdot 120 = 14520$. Последовательность чисел, кратных 10 и не превосходящих 241, представляет арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 10$, $a_n = 240$. Найдём число членов этой прогрессии. Так как она задаётся формулой $a_n = 10n$, то $10n = 240$, $n = 24$.

Итак, $S_2 = \dfrac{10 + 240}{2} \cdot 24 = 3000$.

Получаем $S = 14520 - 3000 = 11520$.

Ответ: 11520.

290. Найдём количество натуральных чисел, не превосходящих 130, которые делятся на 17: $\dfrac{130}{17} = 7{,}64$. Значит, таких чисел 7. Нечётными из них будут $17 \cdot 1$, $17 \cdot 3$, $17 \cdot 5$, $17 \cdot 7$, то есть 4 числа. Найдём их сумму: $17 \cdot (1+3+5+7) = 17 \cdot 16 = 272$.

Найдём количество нечётных чисел, не превосходящих 130: $\frac{130}{2} = 65$.

Это числа $1, 3, 5, \ldots, 129$. Найдём их сумму: $S = \frac{(2 + 2 \cdot (65-1)) \cdot 65}{2} =$ $= 65^2 = 4225$.

Осталось отнять сумму тех нечётных чисел, которые делятся на 17: $4225 - 272 = 3953$.

Ответ: 3953.

291. Тридцать первых членов с чётными номерами прогрессии a_n составляют арифметическую прогрессию b_n, такую, что $b_1 = a_2$, $b_2 = a_4, \ldots,$ $b_{30} = a_{60}$. Найдём a_2 и a_{60}.

$a_2 = \frac{2-18}{0{,}25} = -64$, $a_{60} = \frac{60-18}{0{,}25} = 168$.

Переформулируем задачу: найти сумму тридцати членов арифметической прогрессии, если $b_1 = -64$, $b_{30} = 168$.

Получаем $S_{30} = \frac{-64+168}{2} \cdot 30 = 1560$.

Ответ: 1560.

292. После вычёркивания всех членов последовательности $b_n = 16 \cdot (-0{,}5)^n$, имеющих чётные номера, получилась бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $b_{2n-1} = 16(-0{,}5)^{2n-1}$. Её знаменатель

$$q = \frac{b_{2(n+1)-1}}{b_{2n-1}} = \frac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}} = \frac{16(-0{,}5)^{2n+1}}{16(-0{,}5)^{2n-1}} = (-0{,}5)^2 = \frac{1}{4},$$

а сумма $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{16(-0{,}5)}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{-8}{\frac{3}{4}} = \dfrac{-32}{3} = -10\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $-10\frac{2}{3}$.

293. $\begin{cases} b_1 + b_3 + b_4 = 279, \\ b_3 + b_5 + b_6 = 31, \\ q > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 = 279, \\ b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^5 = 31, \\ q > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} b_1 \cdot \left(1+q^2+q^3\right) = 279, \\ b_1 \cdot q^2\left(1+q^2+q^3\right) = 31, \\ q > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} q^2 = \dfrac{1}{9}, \\ q > 0; \end{cases} \quad q = \frac{1}{3}.$$

$$b_1 = \frac{279}{1+q^2+q^3},\ b_1 = \frac{279 \cdot 27}{31},\ b_1 = 3^5.\ b_8 = b_1 \cdot q^7,\ b_8 = 3^5 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

294. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_6$ — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_1 + b_2 + b_3 = 9$; $b_4 + b_5 + b_6 = -72$. Найдём b_1 и q из системы уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 9, \\ b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^5 = -72; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot (1+q+q^2) = 9, \\ b_1 \cdot q^3 \cdot (1+q+q^2) = -72; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{9}{1+q+q^2}, \\ q^3 = -8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3, \\ q = -2. \end{cases}$$

Следовательно, $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 3 \cdot (-2)^7 = 3 \cdot (-128) = -384$.

Ответ: -384.

295. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_5$ — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_3 = b_2 + 6,\ b_5 = b_3 + 36,\ q > 1$.

Найдём значения b_1 и q из системы

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = b_1 \cdot q + 6, \\ b_1 \cdot q^4 = b_1 \cdot q^2 + 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q \cdot (q-1) = 6, \\ b_1 \cdot q^2 \cdot \left(q^2-1\right) = 36. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое ($q \neq 0, b_1 \neq 0, q \neq \pm 1$), получим $q \cdot (q+1) = 6, q^2 + q - 6 = 0, q_1 = 2, q_2 = -3$ — не удовлетворяет условию $q > 1$. Таким образом, $q = 2$.

$b_1 q(q-1) = 6; 2b_1 = 6; b_1 = 3$.

$$S_{10} = \frac{b_1 \cdot \left(q^{10}-1\right)}{q-1} = \frac{3 \cdot \left(2^{10}-1\right)}{2-1} = 3 \cdot 1023 = 3069.$$

Ответ: 3069.

296. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_9$ — члены данной геометрической прогрессии, q — её знаменатель. По условию $b_5 = b_3 + 8$; $b_9 = b_3 + 728$.

Найдём значения b_1 и q из системы уравнений

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^4 = b_1 \cdot q^2 + 8, \\ b_1 \cdot q^8 = b_1 \cdot q^2 + 728; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q^2 \cdot \left(q^2-1\right) = 8, \\ b_1 \cdot q^2 \cdot \left(q^6-1\right) = 728; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{8}{q^2\left(q^2-1\right)}, \\ \dfrac{q^6-1}{q^2-1} = 91; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{8}{q^2\left(q^2-1\right)}, \\ \dfrac{\left(q^2-1\right)\left(q^4+q^2+1\right)}{q^2-1} = 91; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{8}{q^2(q^2-1)}, \\ q \neq \pm 1, \\ q^4 + q^2 - 90 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{9}, \\ \left[\begin{array}{l} q = 3, \\ q = -3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Следовательно, $b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{1}{9} \cdot 3^6 = 3^4 = 81$.

Ответ: 81.

297. Так как по условию x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 12x + a = 0$, то по теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_1 + x_2 = 12$, $x_1 \cdot x_2 = a$. Так как по условию x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 3x + b = 0$, то по теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_3 + x_4 = 3$, $x_3 \cdot x_4 = b$.

Решим систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 12, \\ x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

Учитывая условие, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 положительные и образуют геометрическую прогрессию ($x_1 > 0$; $q > 0$), получим

$$\begin{cases} x_1 + x_1 \cdot q = 12, \\ x_1 \cdot q^2 + x_1 \cdot q^3 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot (1+q) = 12, \\ x_1 \cdot q^2 \cdot (1+q) = 3. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение системы на первое, получим

$q^2 = \frac{1}{4}$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = -\frac{1}{2}$ — не удовлетворяет условию $q > 0$, значит,

$q = \frac{1}{2}$, тогда из 1-го уравнения системы получим

$$x_1 = \frac{12}{1 + \frac{1}{2}} = 8,\ x_2 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4,\ a = x_1 \cdot x_2 = 8 \cdot 4 = 32,$$

$$b = x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot q^2 \cdot x_1 \cdot q^3 = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{8} = 2.$$

Ответ: $a = 32$, $b = 2$.

298. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии x, $2qx$, $3q^2x$. Тогда

$$\begin{cases} x + b = 2qx, \\ x + 2b = 3q^2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (2q-1)x, \\ b = \frac{1}{2} \cdot (3q^2 - 1)x; \end{cases} \Rightarrow 2q - 1 = \frac{1}{2} \cdot (3q^2 - 1);$$

$3q^2 - 4q + 1 = 0$; $q_1 = \frac{1}{3}$, $q_2 = 1$. Поскольку заданная геометрическая прогрессия убывает, то $0 < q < 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

299. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид $x,\ qx, q^2x$. Пусть b — разность арифметической прогрессии $x,\ 5qx,\ 2q^2x$. Тогда

$$\begin{cases} x + b = 5qx, \\ x + 2b = 2q^2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (5q-1)x, \\ b = \frac{1}{2}\cdot(2q^2-1)x; \end{cases} \Rightarrow 5q - 1 = \frac{1}{2}\cdot(2q^2-1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2q^2 - 10q + 1 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{2}$. Поскольку заданная геометрическая прогрессия убывает, то $0 < q < 1$ — этому условию удовлетворяет лишь значение $q = \frac{5 - \sqrt{23}}{2}$.

Ответ: $\frac{5-\sqrt{23}}{2}$.

300. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии $x, qx, \frac{q^2x}{3}$. Тогда

$$\begin{cases} x + b = qx, \\ x + 2b = \frac{q^2x}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (q-1)x, \\ b = \left(\frac{q^2}{6} - \frac{1}{2}\right)x; \end{cases} \Rightarrow q - 1 = \frac{q^2}{6} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow q^2 - 6q + 3 = 0 \Rightarrow q_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6}$.

Поскольку заданная геометрическая прогрессия возрастает, то $q > 1 \Rightarrow q = 3 + \sqrt{6}$.

Ответ: $3 + \sqrt{6}$.

301. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии с первым членом $x \neq 0$, то есть прогрессия имеет вид x, qx, q^2x. Пусть b — разность арифметической прогрессии $\frac{x}{3}, qx, \frac{q^2x}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+b=qx, \\ \dfrac{x}{3}+2b=\dfrac{q^2x}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\left(q-\dfrac{1}{3}\right)x, \\ b=\left(\dfrac{q^2}{4}-\dfrac{1}{6}\right)x; \end{cases} \Rightarrow q-\frac{1}{3}=\frac{q^2}{4}-\frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3q^2-12q+2=0 \Rightarrow q_{1,2}=2\pm\sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Поскольку заданная геометрическая прогрессия возрастает, то $q>1 \Rightarrow q=2+\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

Ответ: $2+\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

302. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x+y+z=18$. Так как x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $x+z=2y$.

Из второго условия следует, что числа $x+1$, $y+2$, $z+7$ образуют геометрическую прогрессию, а значит, $(x+1)(z+7)=(y+2)^2$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x+y+z=18, \\ x+z=2y, \\ (x+1)(z+7)=(y+2)^2. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y=18-2y$, откуда $y=6$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнение, получим систему

$$\begin{cases} y=6, \\ x+z=12, \\ (x+1)(z+7)=64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6, \\ z=12-x, \\ (x+1)(19-x)=64. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $(x+1)(19-x)=64$, $x^2-18x+45=0$, находим $x_1=3$, $x_2=15$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1=12-3=9$, $z_2=12-15=-3$. Итак, имеем два набора чисел:

1) $x=3, y=6, z=9$; 2) $x=15, y=6, z=-3$.

Второй набор не удовлетворяет условию задачи, так как образует убывающую прогрессию.

Ответ: $3; 6; 9$.

303. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x+y+z=33$. Так как x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $x+z=2y$.

Из второго условия следует, что числа x, $y-3$, $z-2$ образуют геометрическую прогрессию, следовательно, $x(z-2)=(y-3)^2$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными $\begin{cases} x+y+z=33, \\ x+z=2y, \\ x(z-2)=(y-3)^2. \end{cases}$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = 33 - 2y$, откуда $y = 11$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y=11, \\ x+z=22, \\ x(z-2)=64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=11, \\ z=22-x, \\ x(20-x)=64. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $x(20-x) = 64$, $x^2 - 20x + 64 = 0$, находим $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 22 - 4 = 18$, $z_2 = 22 - 16 = 6$.

Итак, имеем два набора чисел: 1) $x = 4$, $y = 11$, $z = 18$;
2) $x = 16$, $y = 11$, $z = 6$.

Первый набор не удовлетворяет условию, так как образует возрастающую прогрессию.

Ответ: 16; 11; 6.

304. Пусть a, aq, aq^2 — данная геометрическая прогрессия ($a \neq 0$), тогда $\frac{2}{3}a$, aq, aq^2 — арифметическая прогрессия, то есть существует число d, такое, что $\frac{2}{3}a + d = aq$ и $\frac{2}{3}a + 2d = aq^2$. Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + d = aq, \\ \frac{2}{3}a + 2d = aq^2. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым уравнением: $-\frac{2}{3}a = -2aq + aq^2$; $q^2 - 2q + \frac{2}{3} = 0$; $q = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как по условию геометрическая прогрессия должна убывать, то $0 < q < 1$ — этому условию удовлетворяет только значение $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

305. Пусть a, aq, aq^2 — данная геометрическая прогрессия, тогда a, $\frac{3}{2}aq$, aq^2 — арифметическая прогрессия, то есть существует число d, такое, что $\frac{3}{2}aq = a + d$ и $aq^2 = a + 2d$. Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{3}{2}aq = a + d, \\ aq^2 = a + 2d. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (-2) и сложим со вторым уравнением: $aq^2 - 3aq = -a$; $q^2 - 3q + 1 = 0$; $q = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Так как по условию геометрическая прогрессия должна возрастать, то $q > 1$ — этому условию удовлетворяет только значение $q = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

306. Отличные от нуля числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Поэтому если x удовлетворяет условию задачи, то $x(5x-2) = (x+2)^2$, $5x^2 - 2x = x^2 + 4x + 4$; $4x^2 - 6x - 4 = 0$; $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Последнее уравнение имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. x_1 не удовлетворяет условию задачи, так как не является целым.

Ответ: 2.

307. Так как числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, то $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Следовательно, искомое значение x удовлетворяет уравнению
$-x(x-5) = (x+1)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 5x = x^2 + 2x + 1$, $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Последнее уравнение имеет корни $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1$.

Значение x_1 не удовлетворяет условию задачи, так как не является целым.

Ответ: 1.

308. Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии, а через d разность арифметической прогрессии. Тогда $b = aq$; $c = aq^2$;
$a + b + d = b + c$; $b + c + d = c + a \Rightarrow a + d = c$; $b + d = a$. Имеем систему из двух уравнений $\begin{cases} a + d = aq^2, \\ aq + d = a. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим $a - aq = aq^2 - a$. Поскольку числа a, b, c различны, то $a \neq 0$. Следовательно, $q^2 + q - 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются $q_1 = -2$, $q_2 = 1$. Значение $q = 1$ не подходит, так как по условию задачи числа a, b, c должны быть различны. Следовательно, $q = -2$.

Ответ: -2.

309. Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии, а через d разность арифметической прогрессии. Тогда $b = aq$; $c = aq^2$; $c + a + d = a + b$; $a + b + d = b + c \Rightarrow c + d = b$; $a + d = c$.

Имеем систему из двух уравнений $\begin{cases} aq^2 + d = aq, \\ a + d = aq^2. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения системы второе. Получим $aq^2 - a = aq - aq^2$. Поскольку числа a, b, c различны, то $a \neq 0$. Следовательно, $2q^2 - q - 1 = 0$. Корнями этого уравнения являются $q_1 = -0{,}5$, $q_2 = 1$. Значение $q = 1$ не подходит, так как по условию задачи числа a, b, c должны быть различны. Следовательно, $q = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

310. Пусть b — первое из чисел, образующих данную геометрическую прогрессию. Тогда bq, bq^2 — второе и третье из этих чисел. По условию, числа b^2, $(bq)^2$, $(bq^2)^2$ образуют арифметическую прогрессию, а значит, $2(bq)^2 = b^2 + (bq^2)^2$. Сокращая на b^2 (из условия положительности b следует, что $b \neq 0$), получаем уравнение $2q^2 = 1 + q^4$; $(q^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow q^2 - 1 = 0$; $q_1 = -1$, $q_2 = 1$. Так как по условию все члены прогрессии положительны, то $q > 0$, поэтому $q = 1$ — единственное значение знаменателя прогрессии, удовлетворяющее всем требуемым условиям.

Ответ: 1.

311. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность. Тогда $d > 0$ и числа a, $a + d$, $a + 3d$ образуют геометрическую прогрессию. По свойству геометрической прогрессии имеем $(a + d)^2 = a(a + 3d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 3ad$; $d^2 = ad$. Сократив на d $(d \neq 0)$, получим $d = a$.

То есть числа a, $a + d$ и $a + 3d$ равны соответственно числам a, $2a$ и $4a$. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Ответ: 2.

312. Пусть a — первый член прогрессии, а d — её разность. Тогда $d > 0$ и числа a^2, $(a + d)^2$ и $(a + 4d)^2$ образуют геометрическую прогрессию. Согласно свойству геометрической прогрессии имеем
$(a + d)^4 = a^2(a + 4d)^2$; $(a + d)^2 = |a(a + 4d)|$. Так как $a > 0$, $d > 0$, то $(a + d)^2 = a(a + 4d)$; $a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad$; $d^2 = 2ad$ (сокращаем на $d \neq 0$), $d = 2a$. То есть числа a^2, $(a + d)^2$ и $(a + 4d)^2$ равны соответ-

ственно числам a^2, $9a^2$ и $81a^2$. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 9.

Ответ: 9.

313. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию $x + y + z = 28$. Так как x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $xz = y^2$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1$, $y + 2$, $z - 1$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $(x+1)+(z-1) = 2(y+2)$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 28, \\ x + z = 2y + 4, \\ xz = y^2. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим $y = 24-2y$, откуда $y = 8$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y = 8, \\ x + z = 20, \\ xz = 64; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8, \\ z = 20 - x, \\ x(20 - x) = 64. \end{cases}$$

Решая уравнение $x(20 - x) = 64$, находим $x_1 = 4$, $x_2 = 16$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 20 - 4 = 16$, $z_2 = 20 - 16 = 4$.

Получаем два набора чисел: 1) $x = 4$, $y = 8$, $z = 16$; 2) $x = 16$, $y = 8$, $z = 4$.

Первый набор удовлетворяет условию, а второй — нет, так как числа $16 + 1 = 17$; $8 + 2 = 10$; $4 - 1 = 3$ образуют убывающую прогрессию.

Ответ: 4; 8; 16.

314. Обозначим искомые числа через x, y, z. По условию, $x + y + z = 21$. Так как x, y, z образуют геометрическую прогрессию, то $xz = y^2$.

Из второго условия следует, что числа $x + 1$, $y + 1$, $z - 2$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $(x+1)+(z-2) = 2(y+1)$.

Таким образом, получаем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} x + y + z = 21, \\ x + z = 2y + 3, \\ xz = y^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $y = 18 - 2y$, откуда $y = 6$. Подставив найденное значение y во второе и третье уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y = 6, \\ x + z = 15, \\ xz = 36; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6, \\ z = 15 - x, \\ x(15 - x) = 36. \end{cases}$$

Решая уравнение $x(15 - x) = 36$, находим $x_1 = 3$, $x_2 = 12$. Значения неизвестной z соответственно равны $z_1 = 15 - 3 = 12$, $z_2 = 15 - 12 = 3$.

Получаем два набора чисел: 1) $x = 3, y = 6, z = 12$; 2) $x = 12, y = 6, z = 3$.

Второй набор удовлетворяет условию, а первый — нет, так как числа $3+1 = 4; 6+1 = 7; 12-2 = 10$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Ответ: 12; 6; 3.

315. Пусть b_1, b_2, b_3 — данные положительные числа, q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2 = b_1 q$; $b_3 = b_1 q^2$. По условию числа b_1, b_2, $\frac{b_3}{5}$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $2b_2 = b_1 + \frac{b_3}{5}$; $2b_1 q = b_1 + \frac{1}{5} b_1 q^2$. Заметим, что $b_1 \neq 0$, $q > 1$, иначе прогрессия b_1, b_2, b_3 не является возрастающей. Следовательно, $2q = 1 + \frac{1}{5} q^2$; $q^2 - 10q + 5 = 0$; $q_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$. Значение $q = 5 - 2\sqrt{5}$ не удовлетворяет условию $q > 1$, а значение $q = 5 + 2\sqrt{5}$ этому условию удовлетворяет, то есть является искомым.

Ответ: $5 + 2\sqrt{5}$.

316. Пусть b_1, b_2, b_3 — данные положительные числа, q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$. По условию, числа $b_1, b_2, 0{,}8b_3$ образуют арифметическую прогрессию, следовательно, $2b_2 = b_1 + 0{,}8b_3$; $2b_1 q = b_1 + 0{,}8 b_1 q^2$. Заметим, что $b_1 \neq 0$, $0 < q < 1$. Следовательно, $2q = 1 + 0{,}8q^2$; $4q^2 - 10q + 5 = 0$; $q_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$.

Значение $q = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{4}$ не удовлетворяет условию $0 < q < 1$, а значение $q = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{4}$ этому условию удовлетворяет, то есть является искомым.

Ответ: $\dfrac{5 - \sqrt{5}}{4}$.

317. Предположим, что такая прогрессия существует. Обозначим её знаменатель через q. Тогда $\dfrac{b_m}{b_n} = q^{m-n}$ $(m, n \in N, m > n)$. То есть

$\dfrac{b_5}{b_2} = \dfrac{12}{4} = 3 = q^3$; $\dfrac{b_8}{b_5} = \dfrac{32}{12} = \dfrac{8}{3} = q^3$. Отсюда $3 = \dfrac{8}{3}$. Противоречие. Значит, наше предположение было неверно, и геометрической прогрессии с указанными членами не существует.

Ответ: нет.

318. Покажем, что данная прогрессия существует. По данным задачи находим

1) $\dfrac{b_6}{b_1} = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{4\left(2-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)} = -4\sqrt{2} =$
$= \left(-\sqrt{2}\right)^5$;

2) $\dfrac{b_4}{b_1} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{1-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} = \left(-\sqrt{2}\right)^3$;

3) $\dfrac{b_6}{b_4} = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \dfrac{2\left(4-2\sqrt{2}\right)}{4-2\sqrt{2}} = 2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2$.

Следовательно, данные числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\sqrt{2}$.

Ответ: да.

319. Покажем, что указанная прогрессия существует. По данным задачи находим

1) $\dfrac{b_6}{b_1} = \dfrac{63\sqrt{3}}{-7} = -9\sqrt{3} = \left(-\sqrt{3}\right)^5$;

2) $\dfrac{b_4}{b_1} = \dfrac{21\sqrt{3}}{-7} = -3\sqrt{3} = \left(-\sqrt{3}\right)^3$;

3) $\dfrac{b_6}{b_4} = \dfrac{63\sqrt{3}}{21\sqrt{3}} = 3 = \left(-\sqrt{3}\right)^2$.

Следовательно, данные числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\sqrt{3}$.

Ответ: да.

320. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. Так как по условию
$\begin{cases} b_2 - b_4 = 3, \\ b_1 - b_3 = 6, \end{cases}$ то $\begin{cases} b_1q - b_1q^3 = 3, \\ b_1 - b_1q^2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q(1-q^2) = 3; \\ b_1(1-q^2) = 6. \end{cases}$

Разделим первое равенство на второе ($b_1 \neq 0$, $q \neq \pm 1$). Получим $q = \frac{1}{2}$. Из второго уравнения системы получим $b_1 = 8$. Сумма данной прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$; $S = \frac{8}{1-0{,}5} = 16$.

Ответ: 16.

321. Пусть q — знаменатель данной прогрессии. Так как по условию задачи

$$\begin{cases} b_2 + b_4 = \frac{20}{3}, \\ b_1 + b_3 = 20, \end{cases} \text{ то } \begin{cases} b_1 q + b_1 q^3 = \frac{20}{3}, \\ b_1 + b_1 q^2 = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q(1+q^2) = \frac{20}{3}, \\ b_1(1+q^2) = 20. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе ($b_1 \neq 0, q \neq \pm 1$). Получим $q = \frac{1}{3}$. Из второго уравнения системы получим $b_1 = 18$. Сумма данной прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$.

Ответ: 27.

322. Пусть b_1 — первый член прогрессии, q — её знаменатель. Согласно условию $q \neq 0$ и $\begin{cases} b_1 \cdot q^2 = -18, \\ b_1 \cdot q^5 = 486; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = -27, \\ b_1 = -\frac{18}{q^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3, \\ b_1 = -2. \end{cases}$

Следовательно, сумма первых трёх членов данной прогрессии $S_3 = \frac{b_1\left(q^3-1\right)}{q-1} = \frac{-2\cdot(-28)}{-4} = -14$.

Ответ: -14.

323. Пусть b_1 — первый член данной прогрессии, q — её знаменатель. Согласно условию, $q \neq 0$ и $\begin{cases} b_1 q^3 = -32, \\ b_1 q^8 = 1024; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^5 = -32, \\ b_1 = -\frac{32}{q^3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -2, \\ b_1 = 4. \end{cases}$

Следовательно, сумма первых четырёх членов данной прогрессии $S_4 = \frac{b_1\left(q^4-1\right)}{q-1} = \frac{4\cdot 15}{-3} = -20$.

Ответ: -20.

324. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 3$; $q = \frac{1}{3}$. Так как $\frac{1}{81} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = b_1 q^5$, то число $\frac{1}{81}$ является членом данной прогрессии.

Ответ: да.

325. В данной геометрической прогрессии $b_1 = 0{,}5$; $q = \frac{1}{0{,}5} = 2$. Так как $64 = 0{,}5 \cdot 2^7 = b_1 q^7$, то число 64 является членом данной прогрессии.

Ответ: да.

326. Согласно условию, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 21, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_3} = \dfrac{7}{12}, \end{cases} \quad \text{где } b_1 > 0,\, b_2 > 0,\, b_3 > 0.$$

Так как числа b_1, b_2 и b_3 образуют геометрическую прогрессию, то $b_2 = qb_1$; $b_1 = \frac{b_2}{q}$; $b_3 = qb_2$, где $q \neq 0$. Подставляя значения b_1 и b_3 в систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{b_2}{q} + b_2 + b_2 q = 21, \\ \dfrac{q}{b_2} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_2 q} = \dfrac{7}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2(1 + q + q^2) = 21q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{12}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{7b_2^2 q}{12} = 21q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{12}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $b_2^2 = 36$; $b_2 = -6$ или $b_2 = 6$. Так как $b_2 > 0$, то $b_2 = 6$.

Ответ: 6.

327. Согласно условию, имеем систему уравнений $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 14, \\ \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_3} = \dfrac{7}{8}; \end{cases}$

где $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0$.

Так как числа b_1, b_2 и b_3 образуют геометрическую прогрессию, то $b_2 = qb_1$; $b_1 = \frac{b_2}{q}$, $b_3 = qb_2$, где $q \neq 0$. Подставляя значения b_1 и b_3 в систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{b_2}{q} + b_2 + b_2 q = 14, \\ \dfrac{q}{b_2} + \dfrac{1}{b_2} + \dfrac{1}{b_2 q} = \dfrac{7}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2(1 + q + q^2) = 14q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7b_2^2 q}{8} = 14q, \\ q^2 + q + 1 = \dfrac{7b_2 q}{8}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $b_2^2 = 16$; $b_2 = -4$ или $b_2 = 4$. Так как $b_2 > 0$, то $b_2 = 4$.

Тогда $b_1 b_2 b_3 = \dfrac{b_2}{q} \cdot b_2 \cdot q b_2 = b_2^3 = 64$.

Ответ: 64.

328. $y = -\dfrac{9x + x^3}{3x}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На $D(y)$ имеем $-\dfrac{x \cdot (9 + x^2)}{3x} = -\dfrac{9 + x^2}{3} = -\dfrac{1}{3}x^2 - 3$.

Графиком функции $y = -\dfrac{1}{3}x^2 - 3$ при $x \neq 0$ является парабола с вершиной $(0; -3)$, не принадлежащей ей, ветви направлены вниз. Составим таблицу:

x	-3	-1	1	3
y	-6	$-3\frac{1}{3}$	$-3\frac{1}{3}$	-6

График функции изображён на рисунке 147.

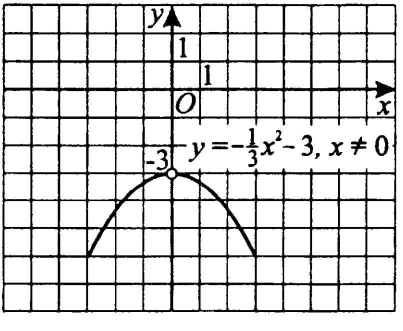


Рис. 147

329. $y = \dfrac{8x - x^3}{4x}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На $D(y)$ имеем $\dfrac{8x - x^3}{4x} = \dfrac{x \cdot (8 - x^2)}{4x} = \dfrac{8 - x^2}{4} = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2$.

Графиком функции $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2$ при $x \neq 0$ является парабола с вершиной $(0; 2)$, не принадлежащей графику, ветви направлены вниз. Составим таблицу:

x	-2	-1	1	2
y	1	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{4}$	1

График заданной функции изображён на рисунке 148.

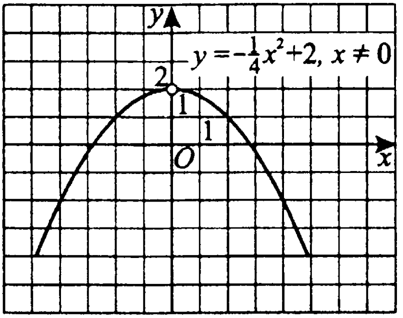


Рис. 148

330. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{2x + 6}$. Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$. На $D(y)$ имеем

$$y = \frac{x^2 \cdot (x + 3) - 4 \cdot (x + 3)}{2 \cdot (x + 3)} = \frac{(x^2 - 4) \cdot (x + 3)}{2 \cdot (x + 3)} = \frac{1}{2}x^2 - 2.$$

Графиком функции $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$ при $x \neq -3$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(0; -2)$.

Так как $x \neq -3$, то точка с координатами $(-3; 2{,}5)$ не принадлежит графику.

Составим таблицу:

x	-2	-1	1	2
y	0	$-1{,}5$	$-1{,}5$	0

График заданной функции изображён на рисунке 149.

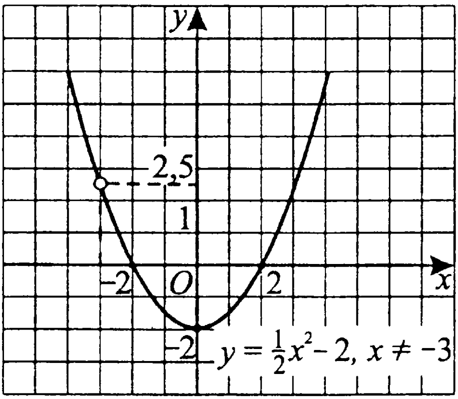


Рис. 149

331. $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \geqslant 1, \\ -(x-1)^2 + 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$

1) $y = \dfrac{1}{x}$, если $x \geqslant 1$. Составим таблицу:

x	1	2	4
y	1	$0{,}5$	$0{,}25$

2) $y = -(x-1)^2 + 1$, если $x < 1$. График есть ветвь параболы (ветви направлены вниз, вершина $(1; 1)$).

Составим таблицу:

x	0	-1
y	0	-3

График заданной функции изображён на рисунке 150.

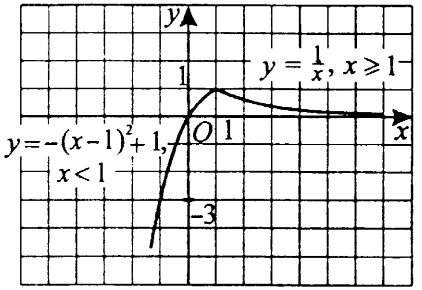


Рис. 150

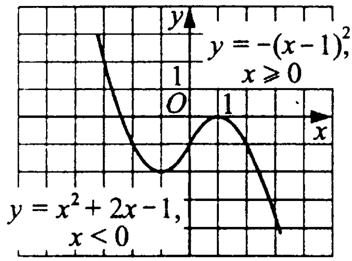


Рис. 151

332. График функции состоит из двух частей:

1) для неотрицательных x — это график функции $y=-(x-1)^2$ — парабола, ветви направлены вниз, вершина $(1;0)$;

2) для отрицательных x — это график функции $y=x^2+2x-1$ — парабола, ветви направлены вверх, вершина $(-1;-2)$.

График заданной функции изображён на рис. 151.

333. 1) Графиком функции $y=(x-3)^2-2$, $x\geqslant 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $(3;\ -2)$.

Дополнительные точки:

x	1	2	3	4	5
y	2	-1	-2	-1	2

2) Графиком функции $y=-2x^2+4$, $x<1$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(0;4)$.

Дополнительные точки:

x	-1	-2
y	2	-4

(см. рис. 152).

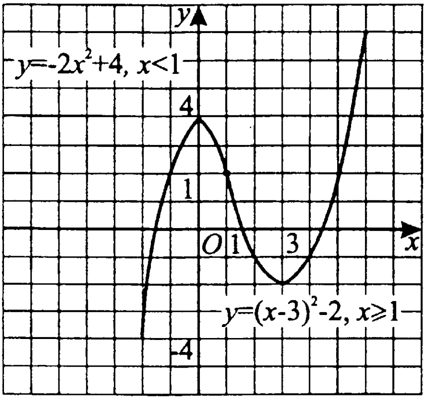


Рис. 152

334. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.

Разложим на множители числитель дроби: $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-3}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид $y = x - 1$. Графиком функции является прямая без точки $(3; 2)$.

Составим таблицу:

x	0	1
y	-1	0

График заданной функции изображён на рисунке 153.

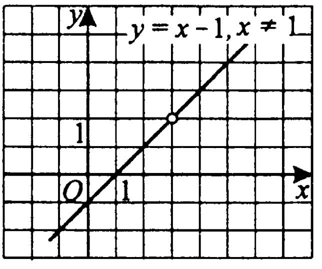


Рис. 153

335. $y = \dfrac{x - 4}{x^2 - 4x}$.

Разложим на множители знаменатель дроби: $y = \dfrac{x-4}{x(x-4)}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель не равен нулю.

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид $y = \dfrac{1}{x}$. Так как $x \neq 4$, то $y \neq \dfrac{1}{4}$.

Графиком функции является гипербола без точки $\left(4; \dfrac{1}{4}\right)$.

Составим таблицу:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$

График заданной функции изображён на рисунке 154.

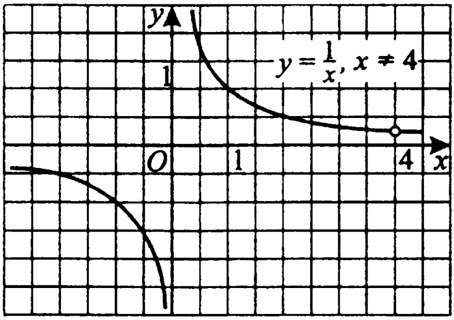


Рис. 154

336. $y = x + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{9 - 12x + 4x^2}$,
$y = x + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2x-3)^2}$, $y = x + |x - 3| + |2x - 3|$.
1) Найдём, при каких значениях x выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю.
$x - 3 = 0$, $x = 3$; $2x - 3 = 0$, $x = 1{,}5$.
2) Рассмотрим функцию на каждом промежутке (см. рис. 155):

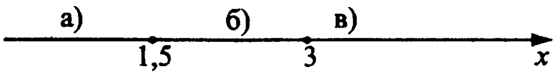


Рис. 155

а) $x < 1{,}5$. $y = x + 3 - x + 3 - 2x$, $y = -2x + 6$.

x	0	1
y	6	4

б) $1{,}5 \leqslant x < 3$. $y = x + 3 - x + 2x - 3$, $y = 2x$.

x	1,5	2
y	3	4

в) $x \geqslant 3$. $x + x - 3 + 2x - 3$, $y = 4x - 6$.

x	3	4
y	6	10

$$\text{Итак, } y = \begin{cases} -2x + 6, \text{ если } x < 1{,}5, \\ 2x, \text{ если } 1{,}5 \leqslant x < 3, \\ 4x - 6, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$$

График заданной функции изображён на рисунке 156.

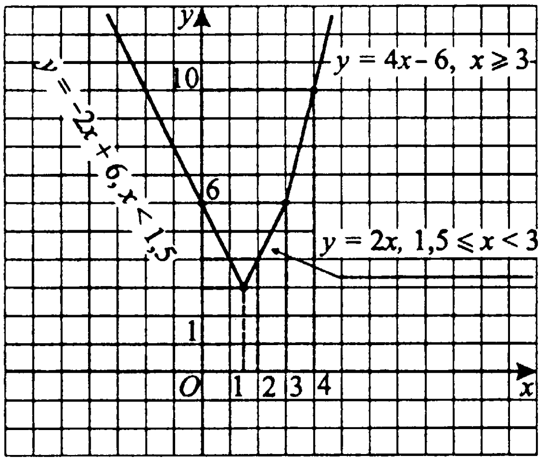


Рис. 156

337. $y = \sqrt{16x^2 + 56x + 49} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 5x$,
$y = \sqrt{(4x+7)^2} + \sqrt{(x-2)^2} - 5x$, $y = |4x + 7| + |x - 2| - 5x$.
1) Найдём нули выражений, стоящих в модульных скобках:
$4x + 7 = 0$, $x = -1{,}75$; $x - 2 = 0$, $x = 2$.
2) Рассмотрим функцию на каждом промежутке (см. рис. 157):

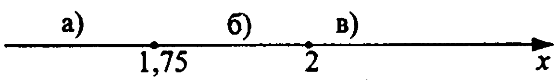


Рис. 157

а) $x < -1{,}75$. $y = -4x - 7 + 2 - x - 5x$, $y = -10x - 5$.

x	-2	$-2{,}5$
y	15	20

б) $-1{,}75 \leqslant x < 2$. $y = 4x + 7 + 2 - x - 5x$, $y = -2x + 9$.

x	0	1
y	9	7

в) $x \geqslant 2$. $y = 4x + 7 + x - 2 - 5x$, $y = 5$.

Итак, $y = \begin{cases} -10x - 5, & \text{если } x < -1{,}75, \\ -2x + 9, & \text{если } -1{,}75 \leqslant x < 2, \\ 5, & \text{если } x \geqslant 2. \end{cases}$

График заданной функции изображён на рисунке 158.

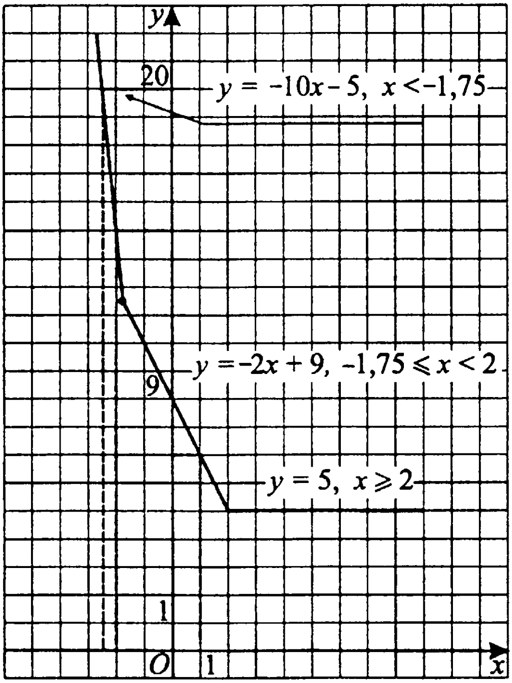


Рис. 158

338. $y = \dfrac{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4)}{(x - 4)(2 - x)}$.

Разложим на множители квадратные трёхчлены, стоящие в числителе:

$y = -\dfrac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x-2)}$.

Найдём область определения функции, зная, что дробь определена, если знаменатель отличен от нуля: $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

На найденной области определения функция примет вид
$y = -(x - 3)\cdot(x - 1)$ или $y = -x^2 + 4x - 3$.

Графиком функции является парабола с вершиной $(2; 1)$, ветви которой направлены вниз. Точки $(2; 1)$ и $(4; -3)$ не принадлежат параболе.

Дополнительные точки:

x	0	1	3
y	-3	0	0

График заданной функции изображён на рисунке 159.

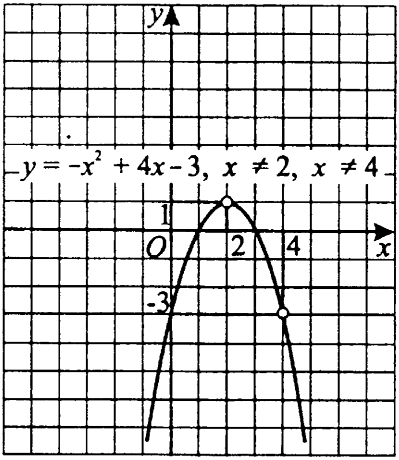


Рис. 159

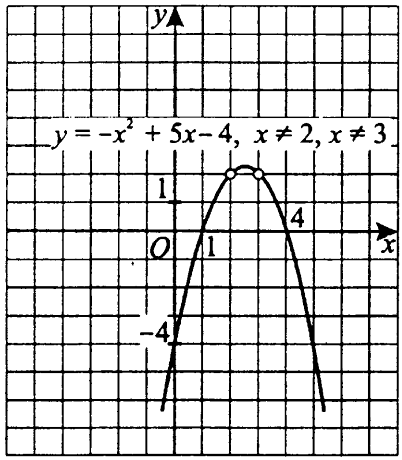


Рис. 160

339. Область определения $D(y)$: $x\neq 2$, $x\neq 3$.

$$y=-\frac{(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-2)}=-(x-1)(x-4).$$

$y=-(x^2-5x+4)=-x^2+5x-4$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке с координатами $(2{,}5; 2{,}25)$. Точки $(2; 2)$ и $(3; 2)$ не принадлежат параболе.

График заданной функции изображён на рисунке 160.

340. $y=|ax+b|+c$, $a>0$.

Из рисунка видно, что график функции $y=|ax+b|$ опущен на 2 единицы вниз, значит, $c=-2$. Пусть $\operatorname{tg}\alpha$ — угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox. Тогда $a=\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{6}{2}=3$ (по условию $a>0$).

Если $x>-2$, то $y=ax+(b+c)$. Так как $y(0)=4$, то $b+c=4$; $b=6$.

Ответ: $a=3$; $b=6$; $c=-2$.

341. По условию $a>0$, поэтому данную функцию можно представить в виде $y=a\left|x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right|$. Из рисунка 161 следует, что квадратный трёхчлен $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}$ имеет корни $x_1=-1$, $x_2=5$. Отсюда, согласно

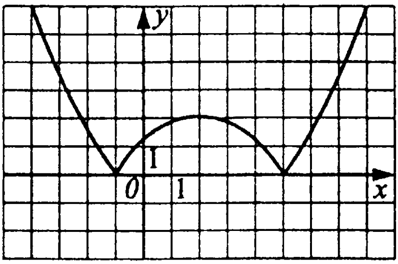


Рис. 161

теореме Виета, получаем $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -4$, $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 = -5$, то есть $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - 4x - 5$. Вершина параболы $y = x^2 - 4x - 5$ имеет абсциссу $x = \frac{-(-4)}{2} = 2$ и ординату $y = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9$. С другой стороны, из рисунка 161 следует, что вершина параболы $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ имеет ординату, равную -2. Следовательно, $a \cdot (-9) = -2$, $a = \frac{2}{9} \Rightarrow$ $b = \frac{b}{a} \cdot a = (-4) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{8}{9}$, $c = \frac{c}{a} \cdot a = (-5) \cdot \frac{2}{9} = -\frac{10}{9}$.

Ответ: $a = \frac{2}{9}$, $b = -\frac{8}{9}$, $c = -\frac{10}{9}$.

342. Угловые коэффициенты k_1 и k_2, отличные от нуля, перпендикулярных прямых удовлетворяют соотношению $k_1 \cdot k_2 = -1$. Поэтому множество прямых, перпендикулярных прямой $y = 0{,}125x$, имеет вид $y = -8x + b$, где b — произвольное действительное число. Для того чтобы прямая $y = -8x + b$ касалась параболы $y = x^2 - 1$, уравнение $x^2 - 1 = -8x + b$ должно иметь единственное решение. Тогда трёхчлен $x^2 + 8x - 1 - b$ должен быть полным квадратом. Следовательно, абсцисса точки касания $x = -4$, тогда ордината $y = (-4)^2 - 1 = 15$.

Ответ: $(-4; 15)$.

343. Так как по условию прямая $y = 0{,}25x$ перпендикулярна прямой $y = kx + b$, то $k = -\frac{1}{0{,}25} = -4$, значит, $y = -4x + b$. Найдём b из условия, что эта прямая касается параболы $y = 4x^2 + 8x + 7$, то есть уравнение $4x^2 + 8x + 7 = -4x + b$ имеет один корень (два равных).

Имеем $4x^2+12x+7-b=0$, $D=0$. $D=144-112+16b=0$, $b=-2$.

Уравнение прямой примет вид $y=-4x-2$.

Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y=4x^2+8x+7, \\ y=-4x-2, \end{cases}$ $4x^2+8x+7=-4x-2$, $4x^2+12x+9=0$, $(2x+3)^2=0$, $x=-\frac{3}{2}$, $y=4$.

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};4\right)$.

344. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y=3x-2$, имеет вид $y=3x+b$.

б) Вычислим b, зная, что прямая $y=3x+b$ касается параболы $y=2x^2-3x+5$. Для этого необходимо, чтобы уравнение $2x^2-3x+5=3x+b$ имело один корень (два равных).

$2x^2-6x+5-b=0$, $D=0$, $D=36-8\cdot5+8b=8b-4$, $8b-4=0$, $b=\frac{1}{2}$.

$y=3x+\frac{1}{2}$ — уравнение касательной.

в) Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y=3x+\frac{1}{2}, \\ y=2x^2-3x+5, \end{cases}$ $2x^2-3x+5=3x+\frac{1}{2}$, $2x^2-6x+4{,}5=0$,

$4x^2-12x+9=0$, $(2x-3)^2=0$, $x=\frac{3}{2}=1{,}5$, $y=3\cdot1{,}5+0{,}5=5$.

$(1{,}5;5)$ — искомые координаты.

Ответ: $(1{,}5;5)$.

345. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y=x+3$, имеет вид $y=x+b$.

б) Вычислим b, зная, что прямая $y=x+b$ касается параболы $y=2x^2-3x+6$. Для этого необходимо, чтобы уравнение $2x^2-3x+6=x+b$ имело один корень (два равных).
$2x^2-4x+6-b=0$, $D=0$, $D=16-48+8b=-32+8b$, $-32+8b=0$, $b=4$.

$y=x+4$ — уравнение касательной.

в) Найдём координаты точки касания, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y=x+4, \\ y=2x^2-3x+6; \end{cases}$ $2x^2-3x+6=x+4$, $2x^2-4x+2=0$, $x^2-2x+1=0$,

$(x-1)^2 = 0$, $x = 1$, $y = 5$.
$(1;5)$ — искомые координаты.

Ответ: $(1;5)$.

346. По условию прямая $y = 6x$ параллельна прямой $y = kx + b$. Тогда $k = 6$ и прямая имеет вид $y = 6x + b$. Она касается параболы $y = x^2 + 5$. Значит, уравнение $x^2 + 5 = 6x + b$ имеет один корень (два равных).
$x^2 - 6x + 5 - b = 0$, $D = 0$, $D = 36 - 4\cdot(5-b)$, $36 - 20 + 4b = 0$, $4b = -16$, $b = -4$.

Уравнение касательной — $y = 6x - 4$.

Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = x^2 + 5, \\ y = 6x - 4. \end{cases}$ $x^2 + 5 = 6x - 4$, $x^2 - 6x + 9 = 0$, $(x-3)^2 = 0$,

$x = 3$, $y = 14$.

Ответ: $(3;14)$.

347. 1) Так как касательная параллельна прямой $y = 14x$, то её уравнение $y = 14x + b$.
Вычислим b, зная, что прямая $y = 14x + b$ касается параболы $y = x^2 + 9$, то есть уравнение $x^2 - 14x + 9 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 196 - 4\cdot(9-b)$, $196 - 36 + 4b = 0$, $4b = -160$, $b = -40$.

Уравнение касательной — $y = 14x - 40$.

2) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений:
$\begin{cases} y = x^2 + 9, \\ y = 14x - 40. \end{cases}$ $x^2 + 9 = 14x - 40$, $x^2 - 14x + 49 = 0$, $(x-7)^2 = 0$,

$x = 7$, $y = 58$.

Ответ: $(7;58)$.

348. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 4x$, имеет вид $y = 4x + b$.

б) Вычислим b, зная, что прямая $y = 4x + b$ касается параболы $y = x^2 + 3$, то есть уравнение $x^2 - 4x + 3 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 16 - 4\cdot(3-b)$, $16 - 12 + 4b = 0$, $4 + 4b = 0$, $b = -1$.

Уравнение касательной — $y = 4x - 1$.

в) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений
$\begin{cases} y = x^2 + 3, \\ y = 4x - 1. \end{cases}$ $x^2 + 3 = 4x - 1$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, $(x-2)^2 = 0$, $x = 2$, $y = 7$.

Ответ: $(2;7)$.

349. а) Уравнение касательной, параллельной прямой $y = 2x$, имеет вид $y = 2x + b$.

б) Вычислим b, зная, что прямая $y = 2x + b$ касается параболы $y = x^2 - 14$, то есть уравнение $x^2 - 2x - 14 - b = 0$ имеет один корень (два равных). Тогда $D = 0$, $D = 4 + 4 \cdot (14 + b) = 60 + 4b$, $60 + 4b = 0$, $b = -15$.

Уравнение касательной — $y = 2x - 15$.

в) Координаты точки касания найдём, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 14, \\ y = 2x - 15. \end{cases}$ $x^2 - 14 = 2x - 15$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x - 1)^2 = 0$,

$x = 1$, $y = -13$.

Ответ: $(1; -13)$.

350. Запишем уравнение параболы со старшим коэффициентом, равным 1: $y = x^2 + bx + c$.

По условию парабола касается прямых $y = x$ и $y = 1 - x$, тогда уравнения $x^2 + bx + c = x$ и $x^2 + bx + c = 1 - x$ имеют по одному решению:

$$\begin{cases} x^2 + (b - 1)x + c = 0, \\ x^2 + (b + 1)x + c = 1. \end{cases}$$

Значит, дискриминант каждого квадратного уравнения равен 0.

1) $D = (b - 1)^2 - 4c = 0$; 2) $D = (b + 1)^2 - 4(c - 1) = 0$;

$\begin{cases} (b - 1)^2 = 4c, \\ (b + 1)^2 + 4 = 4c, \end{cases}$ $(b - 1)^2 = (b + 1)^2 + 4$, $b^2 - 2b + 1 = b^2 + 2b + 1 + 4$,

$b = -1$, тогда $c = 1$.

Таким образом, $y = x^2 - x + 1$.

Ответ: $y = x^2 - x + 1$.

351. Найдём b и c, используя данные задачи. Так как парабола касается прямых $y = x + 1$, $y = 5 - 3x$, то каждое из уравнений $-x^2 + bx + c = x + 1$ и $-x^2 + bx + c = 5 - 3x$ имеет единственный корень (два равных). Следовательно, дискриминанты уравнений $x^2 + (1 - b)x + 1 - c = 0$, $x^2 - (3 + b)x + 5 - c = 0$ равны нулю. Таким образом, получаем систему уравнений $\begin{cases} (1 - b)^2 - 4(1 - c) = 0, \\ (3 + b)^2 - 4(5 - c) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2b + b^2 - 4 + 4c = 0, \\ 9 + 6b + b^2 - 20 + 4c = 0; \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 4c = 3, \\ b^2 + 6b + 4c = 11. \end{cases}$$

Вычитая из нижнего уравнения верхнее, приходим к уравнению $8b = 8$ $\Rightarrow b = 1$. Подставляя найденное значение b в первое уравнение последней системы, находим $1 - 2 + 4c = 3 \Rightarrow c = 1$. Поэтому искомое уравнение параболы — $y = -x^2 + x + 1$.

Ответ: $y = -x^2 + x + 1$.

352. 1. Найдём координаты концов отрезка, решив систему уравнений
$\begin{cases} y = 2|x| + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1. \end{cases}$

1) $x \geqslant 0$; $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1; \end{cases}$ $2x + 1 = 4x^2 + 2x - 1$; $4x^2 - 2 = 0$;
$x^2 - \frac{1}{2} = 0$; $\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

Условию $x \geqslant 0$ удовлетворяет $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$,
$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2} + 1\right)$.

2) $x < 0$, $\begin{cases} y = -2x + 1, \\ y = 4x^2 + 2x - 1, \end{cases}$ $-2x + 1 = 4x^2 + 2x - 1, 2x^2 + 2x - 1 = 0$,
$D = 4 + 8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$,
$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ (не удовлетворяет условию $x < 0$),
$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ (удовлетворяет условию $x < 0$), $y_3 = 1 + \sqrt{3} + 1 = 2 + \sqrt{3}$,
$B\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; 2 + \sqrt{3}\right)$.

2. Найдём координаты середины отрезка:
$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{-1 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}}{4} =$
$= \frac{-1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$,
$y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 2 + \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{-1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}; \frac{3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\right)$.

353. 1. Найдём координаты концов отрезка, решив систему уравнений
$\begin{cases} y = 1 - |x|, \\ y = 2x^2 + x - 1. \end{cases}$

1) $x \geqslant 0$, $\begin{cases} y = 1 - x, \\ y = 2x^2 + x - 1, \end{cases}$ $2x^2 + x - 1 = 1 - x$, $2x^2 + 2x - 2 = 0$,
$x^2 + x - 1 = 0$, $D = 1 + 4 = 5$, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ не удовле-

творяет условию $x \geqslant 0$;

$y_1 = \frac{2+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

2) $x < 0$, $\begin{cases} y = 1 + x, \\ y = 2x^2 + x - 1, \end{cases}$ $2x^2 + x - 1 = 1 + x$, $2x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $(x-1)\cdot(x+1) = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ не удовлетворяет условию $x < 0$;
$y_3 = 1 - 1 = 0$, $B(-1; 0)$.

2. Найдём координаты середины отрезка:

$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-3}{4}$, $y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}; \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$.

354. Запишем уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные числа и $a \neq 0$.

По условию известно, что точки с координатами $(-1; -5)$, $(0; -4)$ и $(1; 1)$ лежат на этой параболе, значит, $y(-1) = -5$, $y(0) = -4$, $y(1) = 1$.

Найдём числа a, b, c, решив систему уравнений

$$\begin{cases} a - b + c = -5, \\ c = -4, \\ a + b + c = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 4 = -5, \\ c = -4, \\ a + b - 4 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -1, \\ c = -4, \\ a + b = 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \\ c = -4. \end{cases}$$

Уравнение параболы примет вид $y = 2x^2 + 3x - 4$.

Найдём координаты вершины:

$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = -\frac{3}{2\cdot 2} = -\frac{3}{4}$,

$y_0 = 2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 4 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 4 = \frac{9-18-32}{8} = -\frac{41}{8}$.

$\left(-\frac{3}{4}; -\frac{41}{8}\right)$ — искомые координаты вершины параболы.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{41}{8}\right)$.

355. $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

1) С осью Ox

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$, $x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$, $(x-1)(x^2-4) = 0$; $x - 1 = 0$, $x_1 = 1$; $x^2 - 4 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

$(1;0)$, $(2;0)$, $(-2;0)$ — координаты точек пересечения графика функции $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ с осью Ox.

2) С осью Oy

$(0;4)$ — координаты точки пересечения графика функции

$y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ с осью Oy.

Ответ: $(-2;0)$, $(1;0)$, $(2;0)$, $(0;4)$.

356. $y = -x^3 - 2x^2 + x + 2$.

1) С осью Ox:

$-x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$; $-x^2(x+2) + (x+2) = 0$; $(x+2)\left(1 - x^2\right) = 0$; $x + 2 = 0$, $x_1 = -2$; $1 - x^2 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Таким образом, $(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$ — координаты точек пересечения графика функции

$y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ с осью Ox.

2) С осью Oy: $y(0) = 2$, поэтому $(0;2)$ — координаты точки пересечения графика данной функции с осью Oy.

Ответ: $(-2;0)$, $(-1;0)$, $(1;0)$, $(0;2)$.

357. Пусть точка с координатами $(x;y)$ лежит на параболе

$y = 16x^2 + 12x - 2$, тогда точка, симметричная ей относительно оси Ox, имеет координаты $(x;-y)$ и лежит на прямой $y = 2x + 5$. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 16x^2 + 12x - 2 = y, \\ 2x + 5 = -y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 + 12x - 2 = -2x - 5, \\ y = -2x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 16x^2 + 14x + 3 = 0, \\ y = -2x - 5. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$16x^2 + 14x + 3 = 0,\ \frac{D}{4} = 49 - 48 = 1;$$

$$x_1 = \frac{-7+1}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8} = -0{,}375,\ x_2 = \frac{-7-1}{16} = -0{,}5;$$

$$y_1 = -2\cdot(-0{,}375) - 5 = -4{,}25,\ y_2 = -2\cdot(-0{,}5) - 5 = -4.$$

$(-0{,}375; -4{,}25)$ и $(-0{,}375; 4{,}25)$, $(-0{,}5; -4)$ и $(-0{,}5; 4)$ — координаты искомых точек.

Ответ: 1) $(-0{,}375; -4{,}25)$, $(-0{,}375; 4{,}25)$; 2) $(-0{,}5; -4)$, $(-0{,}5; 4)$.

358. Пусть точка с координатами $(x;y)$ лежит на параболе

$y = 18x^2 - 33x$, тогда точка, симметричная ей относительно оси Oy, имеет координаты $(-x;y)$ и лежит на прямой $y = 6x + 5$. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 18x^2 - 33x = y, \\ -6x + 5 = y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 33x = -6x + 5, \\ y = -6x + 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 - 27x - 5 = 0, \\ y = -6x + 5. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$18x^2 - 27x - 5 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{27 \pm \sqrt{729 + 360}}{36}$; $x_{1,2} = \dfrac{27 \pm 33}{36}$; $x_1 = \dfrac{5}{3}$,

$x_2 = -\dfrac{1}{6}$; $y_1 = -6 \cdot \dfrac{5}{3} + 5 = -5$, $y_2 = -6 \cdot \left(-\dfrac{1}{6}\right) + 5 = 6$.

$\left(\dfrac{5}{3}; -5\right)$ и $\left(-\dfrac{5}{3}; -5\right)$; $\left(-\dfrac{1}{6}; 6\right)$ и $\left(\dfrac{1}{6}; 6\right)$ — координаты искомых точек.

Ответ: 1) $\left(\dfrac{5}{3}; -5\right), \left(-\dfrac{5}{3}; -5\right)$; 2) $\left(-\dfrac{1}{6}; 6\right), \left(\dfrac{1}{6}; 6\right)$.

359. Обозначим $f(x) = -4x^4 + 10x^2 - 3$. Точка B является одной из точек пересечения графика функции $y = f(x)$ и оси Ox. Значит, $y_B = 0$. Для нахождения x_B решим уравнение $f(x) = 0$. Сделаем замену $t = x^2 \geqslant 0$, тогда уравнение $f(x) = 0$ примет вид

$-4t^2 + 10t - 3 = 0$, $4t^2 - 10t + 3 = 0$, $t_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{4}$,

$t_1 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{4} \geqslant 0$, $t_2 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{4} \geqslant 0$.

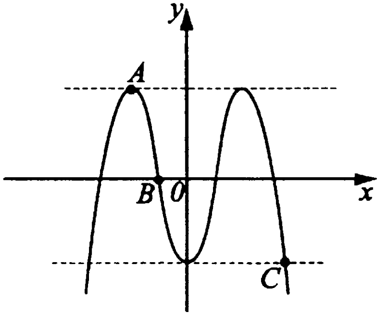


Рис. 162

Поэтому $x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{13}}}{2}$, $\quad x_{3,4} = \pm\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2}$. В силу расположения точки B следует, что x_B — наибольшее отрицательное число среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4. Значит, $x_B = -\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2}$ (см. рис. 162).

Заметим, что y_A соответствует наибольшему значению функции $y = f(x)$. Для нахождения этого значения выделим полный квадрат в представлении функции:

$$-4x^4 + 10x^2 - 3 = -4\left(x^4 - 2\cdot x^2\cdot\frac{5}{4}\right) - 3 =$$

$$-4\left(x^4 - 2\cdot x^2\cdot\frac{5}{4} + \frac{25}{16}\right) + 4\cdot\frac{25}{16} - 3 =$$

$$= -4\left(x^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{13}{4}.$$

Следовательно, $f(x) = -4\left(x^2 - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{13}{4}$. Из полученного представления вытекает, что наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно $\dfrac{13}{4}$, так как для всех действительных x справедливо неравенство $-4\left(x^2 - \dfrac{5}{4}\right)^2 \leqslant 0$. Причём это наибольшее значение достигается в том случае, когда $x^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда из расположения точки A в левой полуплоскости следует, что $x_A = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и соответственно $y_A = \dfrac{13}{4}$.

Определим координаты точки C. Из рисунка 162 следует, что $y_C = f(0) = -3$. Тогда опять же из рисунка 162 вытекает, что x_C равняется положительному корню уравнения $f(x) = -3$. Решим его.

$-4x^4 + 10x^2 - 3 = -3$, $\ -4x^4 + 10x^2 = 0$, $\ x^2(4x^2 - 10) = 0$, $\ x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Значит, $x_C = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Ответ: $A\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}; \dfrac{13}{4}\right)$, $B\left(-\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{13}}}{2}; 0\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}; -3\right)$.

360. Построим график функции $y = \big||x+1|-2\big|$ в несколько этапов.

1. Графиком функции $y = x + 1$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 1)$ и $(-1; 0)$.

2. График функции $y = |x+1|$ получается из графика функции $y = x+1$ симметричным отражением части прямой, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси.

3. График функции $y = |x+1| - 2$ может быть получен из графика функции $y = |x+1|$ сдвигом оси абсцисс на две единицы вверх.

4. График функции $y = \big||x+1|-2\big|$ получается из графика функции $y = |x+1| - 2$ симметричным отражением части графика, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси.

График заданной функции изображён на рис. 163.

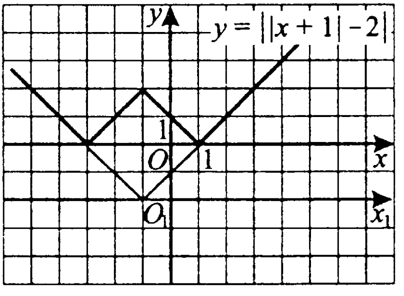


Рис. 163

361. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 0$, $y_0 = 4$, то $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 0$, $b = 0$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + c$. Подставив координаты известных точек, через которые проходит парабола, получим систему $\begin{cases} c = 4, \\ 9a + c = -14; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4, \\ 9a = -14 - c; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 4, \\ a = -2. \end{cases}$

Следовательно, $y = -2x^2 + 4$. Найдём теперь абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $-2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $(\sqrt{2}; 0)$, $(-\sqrt{2}; 0)$.

362. Так как координаты вершины параболы $x_0 = 0$, $y_0 = -12$, то $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 0$, следовательно, $b = 0$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + c$. Подставив координаты известных точек $(0; -12)$ и

$(-1;-9)$, через которые проходит парабола, получим систему
$\begin{cases} c=-12, \\ a+c=-9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-12, \\ a=3; \end{cases}$ следовательно, $y=3x^2-12$.
Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $3x^2-12=0$ $\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 2$.

Ответ: $(2;0)$, $(-2;0)$.

363. Так как координаты вершины параболы $x_0=4$, $y_0=-28$, то $x_0=-\dfrac{b}{2a}=4$; $b=-8a$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y=ax^2-8ax+c$. Подставив координаты точек $(0;4)$ и $(4;-28)$, через которые проходит парабола, получим $c=4$; $16a-32a+c=-28$; $a=\dfrac{28+c}{16}=2$, следовательно, $y=2x^2-16x+4$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $2x^2-16x+4=0$, $x_{1,2}=4\pm\sqrt{14}$.

Ответ: $\left(4+\sqrt{14};0\right)$, $\left(4-\sqrt{14};0\right)$.

364. Так как координаты вершины параболы $x_0=6$, $y_0=33$, то $x_0=-\dfrac{b}{2a}=6$; $b=-12a$. Итак, уравнение параболы имеет вид $y=ax^2-12ax+c$. Подставив координаты точек $(0;-3)$ и $(6;3)$, через которые проходит парабола, получим $c=-3$; $36a-72a+c=33$; $a=\dfrac{c-33}{36}=-1$, следовательно, $y=-x^2+12x-3$. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox: $-x^2+12x-3=0$, $x_{1,2}=6\pm\sqrt{33}$.

Ответ: $\left(6+\sqrt{33};0\right)$, $\left(6-\sqrt{33};0\right)$.

365. ***Ключевые идеи решения.*** 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2, является графиком функции $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $a\neq 0$. 2. Прямая, касающаяся параболы и параллельная оси Ox, касается этой параболы в её вершине.

1. Парабола, указанная в условии, является графиком функции $y=a(x-2)(x+6)$, где $a\neq 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x_3=0$, то ордината этой точки $y_3=-12a$. По условию, $y_3=24$, таким образом, $a=-2$, и уравнение параболы имеет вид $y=-2x^2-8x+24$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0=\dfrac{8}{-4}=-2$ и ординатой $y_0=y(-2)=32$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси x, является прямая $y=32$.

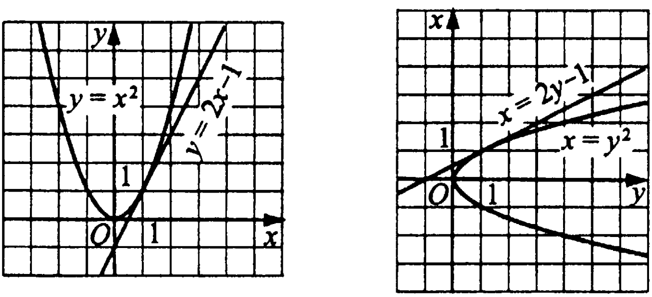
Ответ: $y=32$.

366. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 6$, является графиком функции $y = a(x+2)(x-6)$, где $a \neq 0$. Так как парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x_3 = 0$, то ордината этой точки $y_3 = -12a$. По условию $y_3 = -9$, таким образом, $a = 0{,}75$, и уравнение параболы имеет вид $y = 0{,}75x^2 - 3x - 9$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \dfrac{3}{1{,}5} = 2$ и ординатой $y_0 = y(2) = -12$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси Ox, является прямая $y = -12$.

Ответ: $y = -12$.

367. По условию прямая $y = 2x - 1$ касается параболы $y = x^2$ (см. рис. 164 а). Заметим, что если в уравнениях, задающих эти функции, поменять местами переменные (что соответствует симметричному отражению исходного графика относительно прямой $y = x$), то получим искомую касательную к кривой $x = y^2$ в точке с координатами $(1; 1)$ (см. рис. 164 б). Значит, она задаётся уравнением $x = 2y - 1$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.



а) б)

Рис. 164

Ответ: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

368. Пусть прямая $x = ky + b$ касается параболы $x = y^2$ в точке с координатами $x = 1, y = -1$. Это означает, что $-k+b = 1$ и уравнение $y^2 = ky+b$ имеет ровно одно решение, то есть $D = 0$; $D = k^2 + 4b = 0$. Учитывая равенство $-k+b = 1$, получим $D = k^2+4(1+k) = k^2+4k+4 = (k+2)^2 = 0$.

Отсюда $k = -2, b = -1$, то есть $x = -2y-1$ является искомой прямой. Запишем уравнение этой прямой — $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}(x+1)$.

369. По формуле расстояния между двумя точками имеем $OA = \sqrt{(8-4)^2+(6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Следовательно, радиус данной в условии окружности равен 5, и она определяется уравнением $(x-4)^2+(y-3)^2 = 25$.

Полагая в этом уравнении $y = 0$, получаем уравнение для абсцисс точек пересечения данной окружности с осью Ox: $(x-4)^2+9 = 25$. Решим последнее уравнение: $(x-4)^2 = 16$, $\left[\begin{array}{l} x-4=-4, \\ x-4=4; \end{array}\right.$ $x_1 = 0$, $x_2 = 8$. Аналогично ординаты точек пересечения окружности с осью Oy удовлетворяют уравнению $16+(y-3)^2 = 25$ (в уравнении окружности полагаем $x = 0$). Имеем $(y-3)^2 = 9$, $\left[\begin{array}{l} y-3=-3, \\ y-3=3; \end{array}\right.$ $y_1 = 0$, $y_2 = 6$. Итак, данная окружность пересекает ось Ox в точках $(0;0)$ и $(8;0)$, а ось Oy в точках $(0;0)$ и $(0;6)$.

Ответ: $(0;0), (8;0), (0;6)$.

370. По формуле расстояния между двумя точками имеем $OA = \sqrt{(3-2)^2+(4-2)^2} = \sqrt{5}$. Следовательно, радиус данной в условии окружности равен $\sqrt{5}$, и она определяется уравнением $(x-2)^2+(y-2)^2 = 5$. Полагая в этом уравнении $y = 0$, получаем уравнение для абсцисс точек пересечения данной окружности с осью Ox: $(x-2)^2+4 = 5$. Решим последнее уравнение: $(x-2)^2 = 1$, $\left[\begin{array}{l} x-2=-1, \\ x-2=1; \end{array}\right.$ $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Итак, данная окружность пересекает ось Ox в точках $(1;0)$ и $(3;0)$. Поскольку уравнение данной окружности симметрично относительно x и y, то точками пересечения этой окружности с осью Oy являются точки $(0;1)$ и $(0;3)$.

Ответ: $(1;0), (3;0), (0;1), (0;3)$.

371. $y = \dfrac{x^2-25}{10-2x}$. Областью определения данной функции являются все x, при которых $10-2x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty;5) \cup (5;+\infty)$. При $x \neq 5$ имеем $\dfrac{x^2-25}{10-2x} = \dfrac{(x-5)(x+5)}{2(5-x)} = -0{,}5 \cdot (x+5)$.

16. Зак. № 71

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x + 5)$ с учётом того, что $y \neq -0{,}5(5 + 5)$, $y \neq -5$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

372. $y = \dfrac{25 - x^2}{2x - 10}$. Областью определения данной функции являются все x, при которых $2x - 10 \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$. При $x \neq 5$ имеем $\dfrac{25 - x^2}{2x - 10} = \dfrac{(5 - x)(5 + x)}{2(x - 5)} = -0{,}5 \cdot (x + 5)$. Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x + 5)$ с учётом того, что $y \neq -0{,}5 \cdot (5 + 5)$, $y \neq -5$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$.

373. *Ключевые идеи решения.*

1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами x_1 и x_2, является графиком функции $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, где $a \neq 0$. Прямая, касающаяся параболы и параллельная оси Ox, касается этой параболы в её вершине.

2. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$, является графиком функции $y = a(x+2)(x-4) = ax^2 - 2ax - 8a$, где $a \neq 0$.

3. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_B = \dfrac{2a}{2a} = 1$ и ординатой $y_B = y(1) = -9a$. Значит, касательной к параболе, параллельной оси Ox, является прямая $y = -9a$. По условию, парабола касается прямой $y = -18$, следовательно, $-9a = -18$, $a = 2$, и уравнение параболы имеет вид $y = 2x^2 - 4x - 16$.

Парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = y(0) = -16$.

Ответ: $(0; -16)$.

374. 1. Парабола, пересекающая ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -5$ и $x_2 = 3$, является графиком функции $y = a(x+5)(x-3) = ax^2 + 2ax - 15a$, где $a \neq 0$.

2. Вершиной параболы является точка с абсциссой $x_0 = \dfrac{-2a}{2a} = -1$ и ординатой $y_0 = y(-1) = -16a$. Следовательно, касательной к параболе, параллельной оси Ox, является прямая $y = -16a$. По условию парабола

касается прямой $y = 32$, значит, $a = -2$, и уравнение параболы имеет вид $y = -2x^2 - 4x + 30$.

Парабола пересекает ось Oy в точке с абсциссой $x = 0$ и ординатой $y = y(0) = 30$.

Ответ: $(0; 30)$.

375. Графиком функции $y = 6 - 3x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	0	2
y	6	0

.

Построим прямую (см. рис. 165).

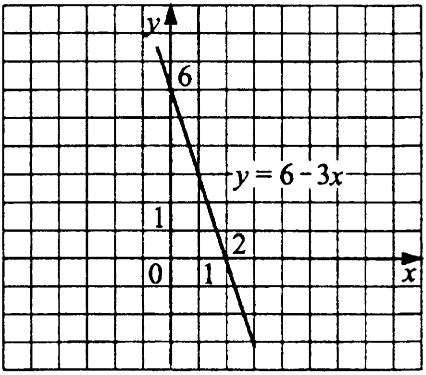


Рис. 165

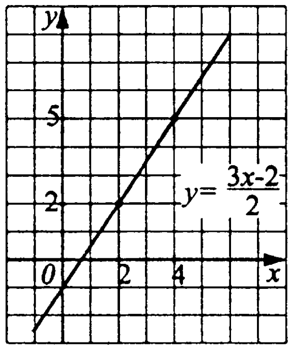


Рис. 166

Решим неравенство: $1{,}5 \leqslant y \leqslant 9 \Leftrightarrow 1{,}5 \leqslant 6 - 3x \leqslant 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -4{,}5 \leqslant -3x \leqslant 3 \Leftrightarrow 1{,}5 \geqslant x \geqslant -1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 1{,}5$.

376. Графиком функции $y = \dfrac{3x-2}{2}$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	2	4
y	2	5

.

Построим прямую (см. рис. 166).

Решим неравенство: $-1 \leqslant y \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant \dfrac{3x-2}{2} \leqslant 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 2$.

377. Для построения графика функции $y = \left|\dfrac{2-x}{4}\right|$ рассмотрим отдельно случаи, когда $2 - x \geqslant 0$ и $2 - x < 0$.

1) Если $2 - x \geqslant 0$ $(x \leqslant 2)$, то $y = \dfrac{1}{4}(2 - x)$. Графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 0{,}5)$ и $(2; 0)$.

2) Если $2 - x < 0\,(x > 2)$, то $y = -\frac{1}{4}(2 - x)$. Графиком этой функции является прямая, проходящая через точки с координатами $(2; 0)$ и $(4; 0{,}5)$.

График заданной функции изображён на рисунке 167.

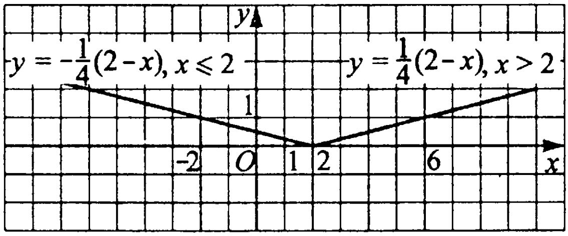


Рис. 167

Решим неравенство $0 \leqslant y < 1$. Получаем $0 \leqslant \left|\frac{2 - x}{4}\right| < 1$;

$0 \leqslant |2 - x| < 4$. Так как неравенство $|2 - x| \geqslant 0$ выполняется для всех x, то остаётся решить неравенство $|2 - x| < 4$; $-4 < 2 - x < 4$; $-6 < -x < 2$; $-2 < x < 6$.

Ответ: $-2 < x < 6$.

378. Построим график функции $y = \left|\frac{3 + x}{6}\right|$. Отдельно рассмотрим случаи:

1) $3 + x \geqslant 0$, тогда $y = \frac{1}{6}(3 + x)$. Графиком функции является луч прямой, проходящий через точки с координатами $(0; 0{,}5)$, $(9; 2)$ (рис. 168).

2) $3 + x < 0$, тогда $y = -\frac{1}{6}(3 + x)$. Графиком функции является луч прямой, проходящий через точки с координатами $(-3; 0)$, $(-6; 0{,}5)$.

Решим неравенство $-1 \leqslant y \leqslant 2 \Leftrightarrow -1 \leqslant \left|\frac{3 + x}{6}\right| \leqslant 2 \Leftrightarrow -6 \leqslant |3 + x| \leqslant 12$.

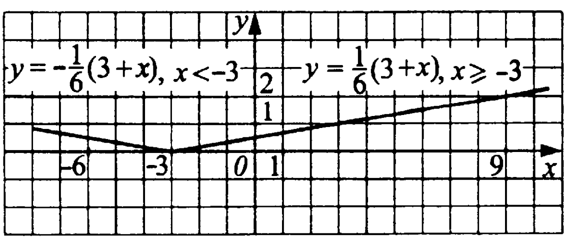


Рис. 168

Так как неравенство $|3 + x| \geqslant -6$ выполняется для всех x, то остаётся неравенство $|3 + x| \leqslant 12 \Leftrightarrow -12 \leqslant 3 + x \leqslant 12 \Leftrightarrow -15 \leqslant x \leqslant 9$.

Ответ: $-15 \leqslant x \leqslant 9$.

379. Графиком функции $y = 3 - 2x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	1	-1

Построим прямую (см. рис. 169).

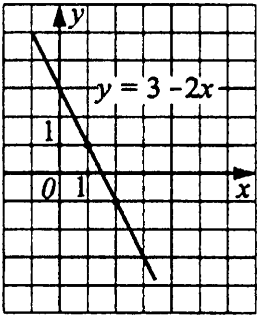


Рис. 169

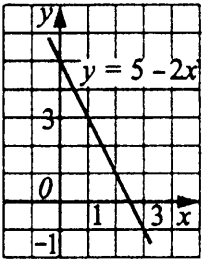


Рис. 170

Так как функция $y = 3 - 2x$ — непрерывная и убывающая, то $y(5) < y < y(-2) \Leftrightarrow -7 < y < 7$.

Ответ: $-7 < y < 7$.

380. Графиком функции $y = 5 - 2x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	3
y	3	-1

Построим прямую (см. рис. 170).

Так как $y(x)$ — непрерывная и убывающая функция, то из $-1 < x < 3$ следует $y(3) < y(x) < y(-1)$. Значит, $-1 < y < 7$.

Ответ: $-1 < y < 7$.

381. Графиком функции $y = \frac{5 - x}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	5	0
y	0	1,25

Построим прямую (см. рис. 171).

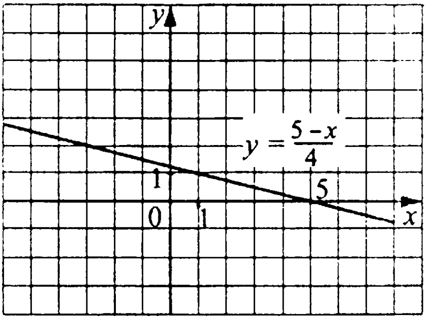


Рис. 171

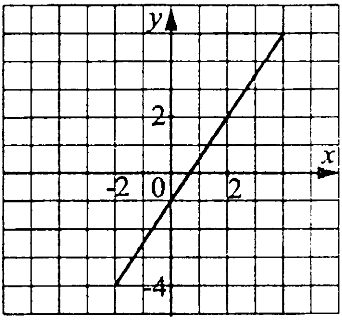


Рис. 172

Так как $0 \leqslant y \leqslant 0{,}25 = \frac{1}{4}$, то $0 \leqslant \frac{5-x}{4} \leqslant \frac{1}{4}$, $0 \leqslant 5-x \leqslant 1$, $-5 \leqslant -x \leqslant -4$; $4 \leqslant x \leqslant 5$.

Ответ: $4 \leqslant x \leqslant 5$.

382. Графиком функции $y = \frac{3x-2}{2}$ является прямая, изображённая на рисунке 172. По графику определяем, что неравенство $-1 < y < 2$ выполняется при $0 < x < 2$.

Ответ: $0 < x < 2$.

383. Графиком функции $y = \frac{x+2}{2}$ является прямая (см. рис. 173). По графику определяем, что неравенство $1{,}5 \leqslant y \leqslant 3$ выполняется при $1 \leqslant x \leqslant 4$.

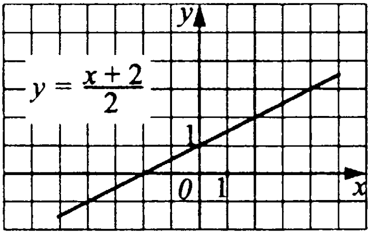


Рис. 173

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant 4$.

384. Графиком функции $y = \frac{x+5}{2}$ является прямая (см. рис. 174).

Решим неравенство $-4 < y < -1{,}5$. Получаем $-4 < \frac{x+5}{2} < -1{,}5$; $-8 < x+5 < -3$; $-13 < x < -8$.

Ответ: $-13 < x < -8$.

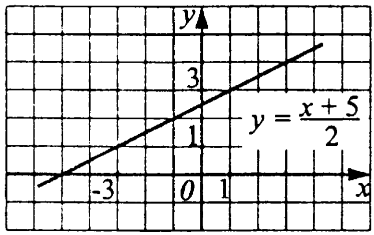


Рис. 174

385. Графиком функции $y = 2x + 3 - x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(1; 4)$ (см. рис. 175). По графику определяем, что $3 \leqslant y \leqslant 4$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$.

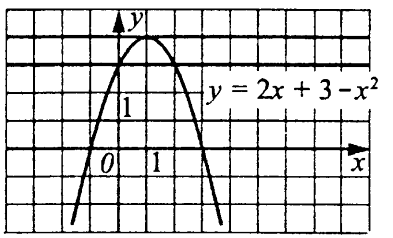


Рис. 175

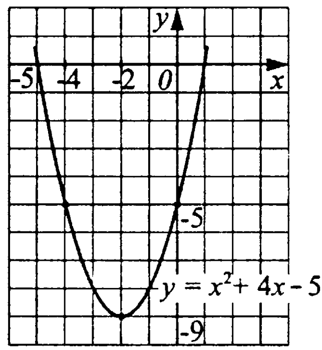


Рис. 176

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 2$.

386. Чтобы построить параболу $y = ax^2 + bx + c$, найдём координаты вершины:

$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2} = -2$; $y_0 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = -9$. Так как $a = 1$, то ветви параболы направлены вверх и не подвержены сжатию или растяжению (рис. 176). По графику функции определяем, что $-9 \leqslant y \leqslant -5$ при $-4 \leqslant x \leqslant 0$.

Ответ: $-4 \leqslant x \leqslant 0$.

387. 1. Функцию $y = \dfrac{5 - 2x}{3}$ запишем в виде $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$. Графиком функции $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(1; 1)$ и $\left(\dfrac{5}{2}; 0\right)$ (см. рис. 177).

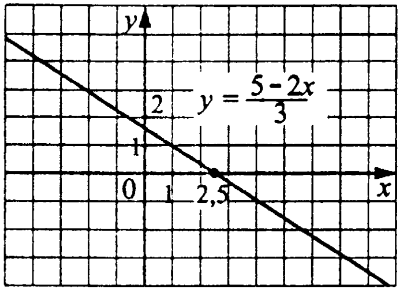


Рис. 177

2. Найдём аналитически, при каких значениях y выполняется неравенство $2 < x \leqslant 3\frac{2}{3}$.

В силу того, что заданная функция непрерывная и убывающая на всей числовой прямой, неравенство $2 < x \leqslant 3\frac{2}{3}$ выполняется при

$y\left(3\frac{2}{3}\right) \leqslant y < y(2)$, то есть $-\frac{7}{9} \leqslant y < \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{7}{9} \leqslant y < \frac{1}{3}$.

388. 1. Функцию $y = 3x^{-1}$ запишем в виде $y = \frac{3}{x}$. $D(y)$: $x \neq 0$. Графиком функции $y = \frac{3}{x}$ является гипербола, ветви которой расположены в I и III координатных четвертях.

x	−0,5	1	1,5	2	3	6
y	−6	3	2	1,5	1	0,5

График функции изображён на рисунке 178.

2. Найдём, при каких значениях x выполняется неравенство $y \geqslant 3{,}3$, решив неравенство $\frac{3}{x} \geqslant 3{,}3$, $\frac{3{,}3x - 3}{x} \leqslant 0$, $\frac{x - \frac{10}{11}}{x} \leqslant 0$, $0 < x \leqslant \frac{10}{11}$ (см. рис. 179).

Ответ: $0 < x \leqslant \frac{10}{11}$.

389. Графиком функции $y = 7x - 5$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	2	9

.

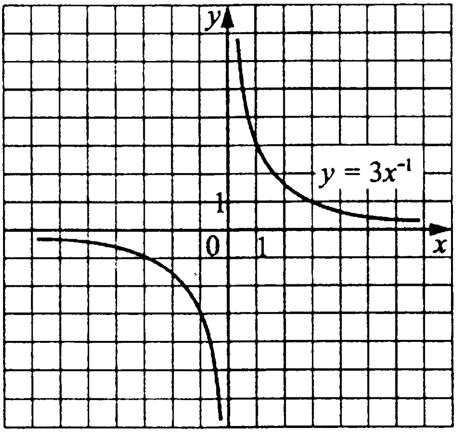


Рис. 178

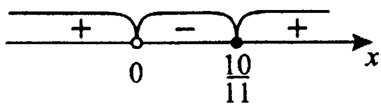


Рис. 179

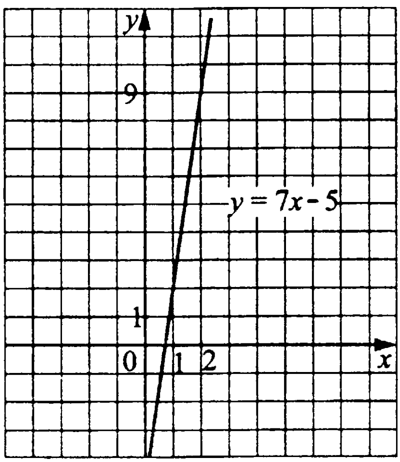


Рис. 180

Построим прямую (см. рис. 180).

Так как по условию $y \geqslant -40$, то $7x - 5 \geqslant -40$; $x \geqslant -5$.

Ответ: $x \geqslant -5$.

390. Графиком функции $y = 6x - 7$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	2
y	-1	5

Построим прямую (см. рис. 181).

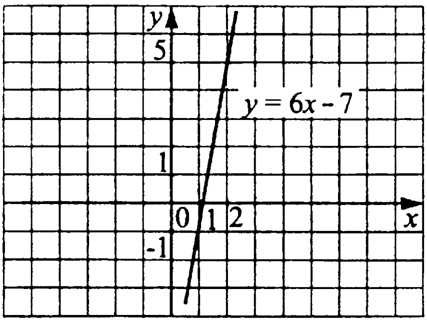


Рис. 181

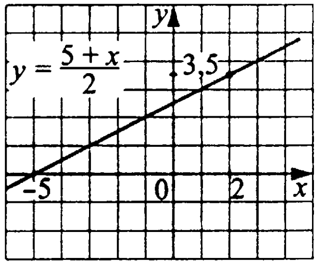


Рис. 182

Так как по условию $y \geqslant -49$, то $6x - 7 \geqslant -49$, $x \geqslant -7$.

Ответ: $x \geqslant -7$.

391. Графиком функции $y = \dfrac{5+x}{2}$ является прямая. Найдём две какие-нибудь точки, её определяющие:

x	1	-1
y	3	2

Построим прямую (см. рис. 182). По графику определяем, что неравенство $0 \leqslant y \leqslant 3{,}5$ выполняется при $-5 \leqslant x \leqslant 2$.

Ответ: $-5 \leqslant x \leqslant 2$.

392. Функцию $y = \dfrac{6-2x}{3}$ запишем в виде $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$. Графиком функции $y = 2 - \dfrac{2}{3}x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2)$ и $(3; 0)$ (см. рис. 183). По графику видно, что $-2 \leqslant y \leqslant 4$ при $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

Ответ: $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

393. Графиком функции $y = 3{,}5 - 0{,}5x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 3{,}5)$ и $(7; 0)$ (см. рис. 184). По графику видно, что $0 \leqslant y \leqslant 3{,}5$ при $0 \leqslant x \leqslant 7$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 7$.

394. Графиком функции $y = 2{,}5 - 0{,}5x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2{,}5)$ и $(5; 0)$ (см. рис. 185). По графику видно, что $0 \leqslant y \leqslant 2{,}5$ при $0 \leqslant x \leqslant 5$.

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant 5$.

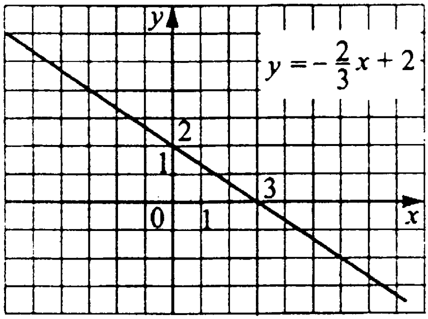


Рис. 183

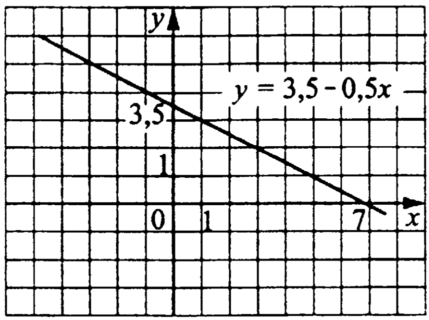


Рис. 184

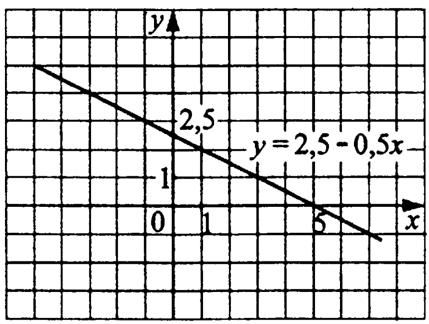


Рис. 185

395. $y = -\frac{x+3}{4}$; $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$; $-5 \leqslant x \leqslant 4$ (см. рис. 186). Функция $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ — непрерывная и убывающая. $y(-5) = -\frac{1}{4}(-5) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $y(4) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$. Если $-5 \leqslant x \leqslant 4$, то $-\frac{7}{4} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

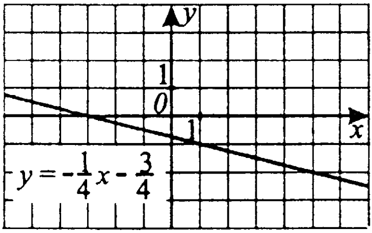


Рис. 186

Функция $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ принимает на отрезке $[-5; 4]$ два целых значения: $y = -1$ и $y = 0$.

Ответ: 2.

396. Графиком функции $y = \frac{7-x}{3}$; $y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x$ является прямая, проходящая через точки $(0; 2\frac{1}{3})$ и $(7; 0)$ (см. рис. 187). По графику видно, что на промежутке $-4 \leqslant x \leqslant 6$ функция принимает три целых значения: $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$.

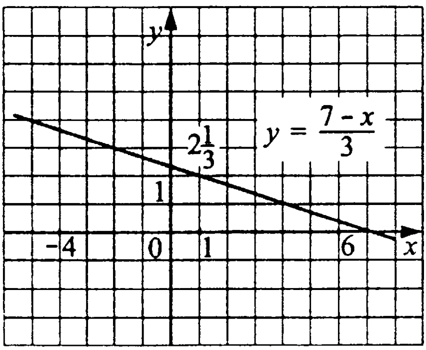


Рис. 187

Ответ: 3.

397. Функция $y = \frac{\sqrt{2x - x^3}}{x^4 - 3x^2 + 1}$ определена при x, удовлетворяющих условию $\begin{cases} 2x - x^3 \geqslant 0, \\ x^4 - 3x^2 + 1 \neq 0. \end{cases}$

1) $x(x^2-2)\leqslant 0$; $x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\leqslant 0$; $x\leqslant -\sqrt{2}$; $0\leqslant x\leqslant \sqrt{2}$ (см. рис. 188).

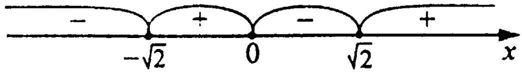


Рис. 188

2) $x^4-3x^2+1\neq 0$. Обозначим $x^2=t$; $t\geqslant 0$, тогда $t^2-3t+1\neq 0$; $t_1\neq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $t_2\neq\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, $x^2\neq\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, $x^2\neq\frac{3-\sqrt{5}}{2}=$

$=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$; $x_1\neq\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3\neq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

$x_4\neq\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3) Имеем (см. рис. 189)

$$\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{2}\right]\cup\left[0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{2}\right].$$

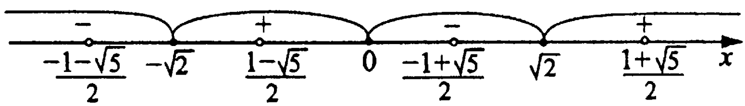


Рис. 189

Ответ: $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{2}\right]\cup\left[0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{2}\right]$.

398. Функция $y=\frac{\sqrt{x^3-7x}}{x^4-5x^2+4}$ определена при x, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} x^3-7x\geqslant 0,\\ x^4-5x^2+4\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})\geqslant 0,\\ (x^2-4)(x^2-1)\neq 0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})\geqslant 0,\\ (x-2)(x+2)(x-1)(x+1)\neq 0.\end{cases}$$

$[-\sqrt{7};-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]\cup[\sqrt{7};+\infty)$ (см. рис. 190).

Ответ: $[-\sqrt{7};-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]\cup[\sqrt{7};+\infty)$.

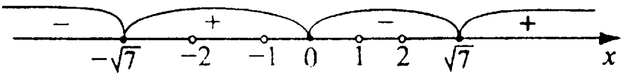


Рис. 190

399. $y = \sqrt{x^2 - 9x - 22} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Найдём область определения функции, решив систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9x - 22 \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-11)(x+2) \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 11, \end{array}\right. \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \geqslant 11$.

Ответ: $[11; +\infty)$.

400. Функция $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{x}$ определена при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4) \geqslant 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 4, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \geqslant 4$.

Ответ: $[4; +\infty)$.

401. Функция $y = \sqrt{7x - x^2 - 10} + \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 - 20x + 25}}$ определена при x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 7x - x^2 - 10 \geqslant 0, \\ 4x^2 - 20x + 25 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5) \leqslant 0, \\ (2x-5)^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 5, \\ x \neq 2{,}5. \end{cases}$$

Ответ: $[2; 2{,}5) \cup (2{,}5; 5]$.

402. $D(y) = (-\infty; 0]$.

Обозначим $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$, тогда $y(t) = 10t^2 + 4t + 2$. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$.

Графиком функции $y(t) = 10t^2 + 4t + 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $\left(-\dfrac{1}{5}; 1\dfrac{3}{5}\right)$. При $t \geqslant -\dfrac{1}{5}$ функция возрастает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наименьшее значение функции $y_{\text{наим.}} = y(0) = 2$.

Ответ: 2.

403. $D(y) = (-\infty; 0]$.

Выполним замену $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$; $-x = t^2$. Тогда $y(t) = t^2 + 2t + 1$; $y(t) = (t+1)^2$.

Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y(t) = (t+1)^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке с координатами $(-1; 0)$.

При $t \geqslant -1$ функция возрастает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наименьшее значение функции $y_{\text{наим.}} = y(0) = 1$.

Ответ: 1.

404. Функция $y = 3x + 5 - 3\sqrt[4]{-x}$ определена при $x \leqslant 0$.
Функция $y = 3x + 5$ — монотонно возрастающая, функция $-3\sqrt[4]{-x}$ также монотонно возрастающая, поэтому функция $y = 3x + 5 - 3\sqrt[4]{-x}$ — монотонно возрастающая. Наибольшее значение функция примет при $x = 0$, то есть $y = 5$ — наибольшее значение.

Ответ: 5.

405. Функция $y = x - 2\sqrt{-x} - 1$ определена при $x \leqslant 0$.
Выполним замену $\sqrt{-x} = t$; $t \geqslant 0$; $-x = t^2$. Тогда $y(t) = -t^2 - 2t - 1$; $y(t) = -(t+1)^2$.
Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $y(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Графиком функции $y = -(t+1)^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина находится в точке с координатами $(-1; 0)$. При $t \geqslant -1$ функция убывает, значит, на промежутке $[0; +\infty)$ наибольшее значение функции $y_{\text{наиб.}} = y(0) = -1$.

Ответ: -1.

406. Областью определения данной функции являются все x, при которых $6 - 2x \neq 0$, то есть $D(y) = \{x \neq 3\}$. При $x \neq 3$ имеем
$\dfrac{x^2 - 9}{6 - 2x} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(3-x)} = -0{,}5 \cdot (x+3)$.

Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции $y = -0{,}5 \cdot (x + 3)$, за исключением значения $y(3) = -0{,}5 \cdot (3+3) = -3$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

407. Областью определения данной функции являются все x, при которых $2x - 6 \neq 0$, то есть $D(y) = \{x \neq 3\}$. При $x \neq 3$ имеем
$\dfrac{9 - x^2}{2x - 6} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{2(x-3)} = -0{,}5 \cdot (x+3)$. Таким образом, множество значений данной функции получается из множества значений функции

$y = -0{,}5 \cdot (x + 3)$, за исключением значения $y(3) = -0{,}5 \cdot (3 + 3) = -3$, то есть совпадает с множеством $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

408. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём наименьшее значение этой функции $x_0 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

$y_0 = (1{,}5)^2 - 3 \cdot 1{,}5 - 10 = 2{,}25 - 4{,}5 - 10 = -12{,}25$.

Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	-1	-2
y	-10	-6	0

Построим график (см. рис. 191).

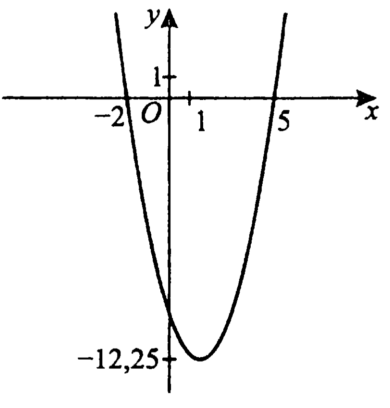


Рис. 191

Ответ: $-12{,}25$.

409. $y = \dfrac{4x - 2x^2}{3} + 2$; $y = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 2$.

График функции $y = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 2$ — парабола, ветви которой направлены вниз.

Найдём координаты вершины:

$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $x_0 = -\dfrac{4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot (-2)} = 1$, $y_0 = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} + 2 = 2\dfrac{2}{3}$.

$\left(1; 2\dfrac{2}{3}\right)$ — координаты вершины параболы.

Найдём нули функции, решив уравнение $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$. $(-1;0)$ и $(3;0)$ — координаты точек пересечения графика функции с осью Ox.

Дополнительные точки:

x	0	2	4	-2
y	2	2	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$

Наибольшее значение функции $y = \dfrac{4x - 2x^2}{3} + 2$ достигается в вершине параболы и равно $2\frac{2}{3}$ (см. рис. 192).

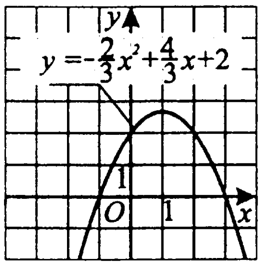


Рис. 192

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

410. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём наименьшее значение этой функции:

$$x_0 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4} = 0{,}75;$$

$$y_0 = \frac{4}{9}(0{,}75)^2 - \frac{2}{3}\cdot 0{,}75 + 1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Так как $D = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{4}{9}\cdot 1 = \frac{4-16}{9} < 0$, то график лежит всюду выше оси Ox. Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	-1	-2
y	1	$2\frac{1}{9}$	$4\frac{1}{9}$

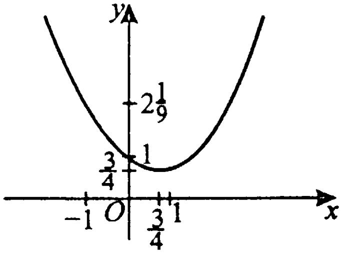


Рис. 193

Построим график (см. рис. 193).

Ответ: $\frac{3}{4}$.

411. График функции $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ — парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 194). Найдём координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$, $y_0 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = -3$. $(3; -3)$ — координаты вершины параболы. Нули функции: $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, следовательно, $(0; 0)$ и $(6; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции с осью Ox.

Дополнительные точки:

x	1	5	-1	7
y	$-1\frac{2}{3}$	$-1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$

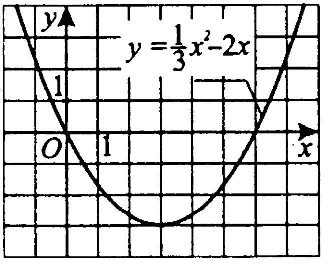


Рис. 194

Функция возрастает на промежутке $[3; +\infty)$.

Ответ: $[3; +\infty)$.

412. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём нули этой функции, то есть точки, где $-0{,}5x^2 - x + 4 = 0$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 2$. То есть у нас есть ответ на второй вопрос задачи: $-4 \leqslant x \leqslant 2$. Для построения графика найдём наибольшее значение этой функции: $x_0 = \dfrac{+1}{-1} = -1$, $y_0 = -0{,}5 + 1 + 4 = 4{,}5$.

Для построения графика найдём значение y функции в дополнительных точках:

x	0	1	2	4
y	4	2,5	0	-8

Построим график (см. рис. 195).

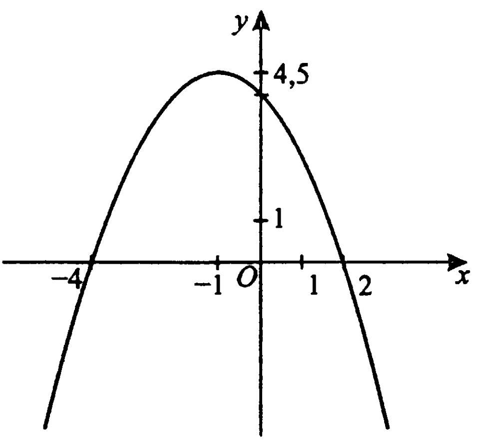


Рис. 195

Ответ: $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

413. Пусть x — длина всего забора, тогда $0{,}3(x - 2)$ — длина части забора, которую покрасил мальчик, красивший сразу за Томом, а из следующих трёх мальчиков первый и второй покрасили $\frac{1}{5}x$ и $\frac{1}{6}x$ метров. Пусть y — длина части забора, оставшейся неокрашенной после этого. Из условия следует, что 1 метр (который в конце красил Том) составляет $100\% - 85\% = 15\%$ от y. То есть $0{,}15y = 1$, $y = \dfrac{100}{15} = \dfrac{20}{3}$. Так как сумма всех окрашенных частей равна длине всего забора, получаем уравнение:

$2 + 0{,}3(x - 2) + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + y = x$; $2 + \frac{3}{10}x - 0{,}6 + \frac{11}{30}x + \frac{20}{3} = x$;

$\frac{20}{30}x + 1{,}4 + \frac{20}{3} = x$; $\frac{24{,}2}{3} = \frac{1}{3}x$; $x = 24{,}2$ (м).

Ответ: 24,2.

414. Пусть первоначально у Кролика было x кг мёда. Винни-Пух за первые 3 часа съел $0{,}4x$ кг, а Пятачок и Кролик съели 300 г мёда. У Кролика осталось $x - 0{,}4x - 0{,}3 = 0{,}6x - 0{,}3$ (кг).

За следующие 3 часа Винни-Пух съел $\frac{2}{3} \cdot (0{,}6x - 0{,}3) = 0{,}4x - 0{,}2$ (кг), а Пятачок и Кролик —100 г. У Кролика осталось $0{,}6x - 0{,}3 - 0{,}4x + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}2x - 0{,}2$ (кг).

Зная, что осталось 1,6 кг, составим уравнение: $0{,}2x - 0{,}2 = 1{,}6$; $x - 1 = 8$; $x = 9$ (кг). Первоначально у Кролика было 9 кг мёда.

Ответ: 9 кг.

415. Пусть скорость первого велосипедиста x км/ч, а второго — y км/ч.

1) первый до встречи прошёл $7{,}5x$ км, а второй — $4y$ км. Составим первое уравнение: $7{,}5x + 4y = 325$;

2) первый до встречи прошёл $5x$ км, а второй — $7y$ км. Составим второе уравнение: $5x + 7y = 325$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} 7{,}5x + 4y = 325, \\ 5x + 7y = 325. \end{cases}$

$7{,}5x + 4y = 5x + 7y$, $2{,}5x = 3y$, $5x = 6y$, $x = \frac{6}{5}y$;

$6y + 7y = 325$, $13y = 325$, $y = 25$, $x = 30$.

Ответ: 30; 25.

416. Пусть скорость автомобиля II — x км/ч, тогда скорость автомобиля I — $(x + 10)$ км/ч.

Первый случай: первый автомобиль прошёл $4(x + 10)$ км до встречи, а второй — $3x$ км. Весь путь — $(4(x + 10) + 3x)$ км.

Второй случай: первый автомобиль до встречи шёл $4{,}5 - 1\frac{5}{6} = 2\frac{2}{3}$ (ч) и прошёл

$2\frac{2}{3}(x+10)$ км. Второй прошёл $4\frac{1}{2}x$ км. Весь путь — $\left(2\frac{2}{3}(x+10)+4\frac{1}{2}x\right)$ км.

Зная, что в обоих случаях автомобили проехали один и тот же путь, составим уравнение:

$4(x + 10) + 3x = \frac{8}{3}(x + 10) + 4\frac{1}{2}x$; $4x + 40 + 3x = \frac{8}{3}x + \frac{80}{3} + 4\frac{1}{2}x$;

$7x-\frac{8}{3}x-4\frac{1}{2}x=\frac{80}{3}-40;\ -\frac{1}{6}x=-\frac{40}{3};\ x=80.$

Скорость автомобиля II — 80 км/ч. Расстояние между пунктами $4(80+10)+3\cdot 80=600$ (км).

Ответ: 600 км.

417. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста I, а y км/ч — скорость велосипедиста II.

Если велосипедист I выедет на 5 ч раньше второго и они встретятся через 5 ч после выезда второго, то к моменту встречи велосипедист I проедет $10x$ км, а второй — $5y$ км.

Если велосипедист II выедет на 2 ч раньше первого и они встретятся через 6 ч после выезда первого, то к моменту встречи велосипедист I проедет $6x$ км, а второй — $8y$ км.

Зная, что расстояние между пунктами 400 км, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases}10x+5y=400,\\6x+8y=400,\end{cases}\quad \begin{cases}2x+y=80, & (1)\\3x+4y=200. & (2)\end{cases}$$

Выразим из уравнения (1) y и подставим его во второе уравнение. Получим $y=80-2x$, $3x+4(80-2x)=200$, $3x+320-8x=200$, $-5x=-120$, $x=24$, $y=80-2\cdot 24=32$.

Таким образом, скорость велосипедиста I — 24 км/ч, скорость велосипедиста II — 32 км/ч.

Ответ: 24 км/ч; 32 км/ч.

418. Пусть скорость движения первой черепахи x м/ч, а второй — y м/ч.

Если бы первая ползла на 40 м/ч быстрее, то через t_1 часов они бы встретились на полпути.

Получаем: $(x+40)\cdot t_1=y\cdot t_1$ или $x+40=y$.

Если бы вторая ползла на 50 м/ч быстрее, то она проползла бы до встречи за t_2 часов в два раза большее расстояние, чем первая.

Получаем: $2xt_2=(y+50)\cdot t_2$ или $2x=y+50$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases}x+40=y,\\2x=y+50;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+40,\\2x=x+40+50;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+40,\\x=90;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=90,\\y=130.\end{cases}$$

Итак, 90 м/ч — скорость первой черепахи, 130 м/ч — скорость второй черепахи.

Ответ: 90; 130.

419. Пусть производительность третьего токаря — x деталей в час, а догоняет он второго по числу деталей через y часов. Тогда второй работал $(1+y)$ часов и сделал $5\cdot(1+y)$ деталей, а третий сделал xy деталей. Первое уравнение — $5\cdot(1+y)=xy$.

Третий токарь, чтобы догнать первого, работал $(2+y)$ часов и сделал $x(2+y)$ деталей, а первый работал $(4+y)$ часов и сделал $6\cdot(4+y)$ деталей.

Второе уравнение — $6\cdot(4+y)=x\cdot(2+y)$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 5\cdot(1+y)=xy, \\ 6\cdot(4+y)=x\cdot(2+y); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+5y=xy, \\ 24+6y-2x=xy; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(1+y)=xy, \\ 5+5y=24+6y-2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(1+y)=xy, \\ y=2x-19. \end{cases}$$

Подставим $y=2x-19$ в первое уравнение системы:

$5\cdot(1+2x-19)=x(2x-19)$; $2x^2-29x+90=0$;

$$x_{1,2}=\frac{29\pm\sqrt{841-720}}{4}=\frac{29\pm 11}{4};\ x_1=10,\ x_2=4{,}5.$$

Так как производительность третьего токаря больше, чем первого и второго, производительность третьего токаря равна 10 деталей в час.

Ответ: 10 деталей в час.

420. Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста, а t ч — время после выезда первого велосипедиста до встречи второго велосипедиста с мотоциклистом. Расстояние, которое проехал второй велосипедист до встречи с мотоциклистом, равно $20(t-2)$ км, а мотоциклист проехал $x(t-4)$ км. К моменту встречи мотоциклиста с первым велосипедистом мотоциклист проехал $x(t-1)$ км, а первый велосипедист — $30(t+3)$ км. По условию $20(t-2)=x(t-4)$ и $x(t-1)=30(t+3)$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 20(t-2)=x(t-4), \\ x(t-1)=30(t+3); \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{20(t-2)}{t-4}, \\ x=\dfrac{30(t+3)}{t-1}; \end{cases}$$

$$\frac{20(t-2)}{t-4}=\frac{30(t+3)}{t-1},\ \ 2(t-2)(t-1)=3(t+3)(t-4),$$

$2(t^2-3t+2)=3(t^2-t-12)$, $2t^2-6t+4=3t^2-3t-36$,

$t^2+3t-40=0$, $t=-8$ или $t=5$.

Время не может быть отрицательно, поэтому подходит только $t = 5$. Отсюда $x = \dfrac{20 \cdot (5-2)}{5-4} = 20 \cdot 3 = 60$; скорость мотоциклиста равна 60 км/ч.

Ответ: 60 км/ч.

421. Пусть x км/ч — скорость третьего катера, а t ч — время, за которое третий катер догонит второй. Расстояние, которое проплыл второй катер до встречи с третьим, равно $40 \cdot (t+1)$ км, а третий катер проплыл xt км. К моменту встречи второго катера с первым второй катер проплыл $(2t+1) \cdot 40$ км, а первый катер — $(2t+2) \cdot 30$ км.
По условию $xt = 40 \cdot (t+1)$ и $(2t+1) \cdot 40 = (2t+2) \cdot 30$.
Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} xt = 40 \cdot (t+1), \\ (2t+1) \cdot 40 = (2t+2) \cdot 30, \end{cases} \quad \begin{cases} xt = 40 \cdot (t+1), \\ 80t + 40 = 60t + 60, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt = 40(t+1), \\ 20t = 20, \end{cases} \quad t = 1,\ x = 80.$$

Скорость третьего катера равна 80 км/ч.

Ответ: 80.

422. Пусть выпуск продукции составлял x, отпускная цена — y. Себестоимость — $\frac{3}{4}y$. Прибыль составляла $y - \frac{3}{4}y = \frac{1}{4}y$ (на отпускной цене). Вся прибыль была $\frac{xy}{4}$.

После изменений выпуск продукции составил $1{,}5x$, отпускная цена — $1{,}1y$, себестоимость — $\frac{3}{4} \cdot 1{,}2y = 0{,}9y$. Прибыль на отпускной цене — $1{,}1y - 0{,}9y = 0{,}2y$. Вся прибыль составила $1{,}5x \cdot 0{,}2y = 0{,}3xy$.

Прибыль увеличилась на $0{,}3xy - 0{,}25xy = 0{,}05xy$, что в процентах составило $\dfrac{0{,}05xy \cdot 4}{xy} \cdot 100\% = 20\%$.

Ответ: 20.

423. Пусть v — первоначальный ежесуточный объём переработки, c_1, c_2 — себестоимость продукции и её отпускная цена до повышения цен, а $\widetilde{v}$, $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2$ — те же величины после произошедших изменений. Тогда первоначально прибыль завода составляла $s = v(c_2 - c_1)$ у.е./сут., а прибыль завода после произошедших изменений равна $\widetilde{s} = \widetilde{v} \cdot (\widetilde{c}_2 - \widetilde{c}_1)$ у.е./сут.

По условию $\widetilde{v} = 1{,}3v$; $\widetilde{c}_2 = 1{,}25c_2$; $\widetilde{c}_1 = c_1 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{4}{3}c_1$; $\widetilde{c}_1 = 0{,}8\widetilde{c}_2$.

Отсюда имеем $\widetilde{c}_1 = 0{,}8\widetilde{c}_2 = 0{,}8(1{,}25c_2) = c_2 \Rightarrow \widetilde{s} = 1{,}3v(1{,}25c_2 - c_2) =$

$= \dfrac{1{,}3v \cdot c_2}{4}$. Далее, $c_1 = \dfrac{3}{4}\tilde{c}_1 = \dfrac{3}{4}c_2 \Rightarrow s = v\left(c_2 - \dfrac{3}{4}c_2\right) = \dfrac{v \cdot c_2}{4}$.

Следовательно, $\dfrac{\tilde{s}}{s} = \dfrac{(1{,}3v \cdot c_2)/4}{(v \cdot c_2)/4} = 1{,}3$, то есть прибыль завода увеличилась на 30%.

Ответ: 30.

424. Примем весь объём работ за 1. Пусть v_1, v_2, v_3 и v_4 — объём работы, выполняемой за час первой, второй, третьей и четвёртой бригадой соответственно. Тогда из первого условия задачи получаем $v_1 + v_2 + v_3 = \dfrac{1}{8}$, из второго — $v_2 + v_3 + v_4 = \dfrac{3}{20}$, из третьего — $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \dfrac{1}{5}$. Умножим обе части третьего уравнения на 2 и вычтем из него первое и второе уравнения. В результате получим $v_1 + v_4 = \dfrac{1}{8}$, следовательно, первая и четвёртая бригады вместе справятся с работой за 8 часов.

Ответ: 8 ч.

425. Пусть производительность бригады I — x, бригады II — y, бригады III — z, бригады IV — t. Найти $\dfrac{1}{z+t}$.

По условию $\begin{cases} y + z + t = 4x, \\ x + z + t = 3y, \\ x + y = \dfrac{1}{11}. \end{cases}$

Найдём $z + t$ — производительность бригад III и IV —

$\begin{cases} z + t = 4x - y, \\ z + t = 3y - x, \\ x + y = \dfrac{1}{11}; \end{cases}$ $4x - y = 3y - x$; $5x = 4y$; $x = \dfrac{4}{5}y$. Подставим в третье уравнение: $\dfrac{4}{5}y + y = \dfrac{1}{11}$, $\dfrac{9}{5}y = \dfrac{1}{11}$, $y = \dfrac{5}{99}$, $x = \dfrac{4}{99}$. Тогда $z + t = 4 \cdot \dfrac{4}{99} - \dfrac{5}{99}$, $z + t = \dfrac{1}{9}$. Тогда бригадам III и IV понадобится $1 : \dfrac{1}{9} = 9$ (дней).

Ответ: 9 дней.

426. Пусть производительность классов следующая: А — a, Б — b, В — c, Г — d.

Необходимо найти время, за которое могут покрасить забор все четыре класса, то есть $\dfrac{1}{a+b+c+d}$.

По условию $b+c+d=\dfrac{1}{3}$, $a+c+d=\dfrac{1}{2}$, $a+b=\dfrac{1}{5}$;

сложим $2a+2b+2c+2d=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}$, $a+b+c+d=\dfrac{31}{60}$, $\dfrac{1}{a+b+c+d}=\dfrac{60}{31}$.

Все четыре класса могут покрасить забор за $1\dfrac{29}{31}$ часа.

Ответ: $1\dfrac{29}{31}$ ч.

427. Примем весь объём работ за 1. Пусть производительность комбайнов следующая: $I - a$, $II - b$, $III - c$, $IV - d$.

Необходимо найти, за какое время будет выполнена работа, если будут работать все четыре комбайна, то есть $\dfrac{1}{a+b+c+d}$.

По условию $a+b+c=\dfrac{1}{1\frac{1}{3}}$; $a+b+d=\dfrac{1}{2}$; $c+d=\dfrac{1}{1\frac{1}{3}}$.

Получаем $2a+2b+2c+2d=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}$; $a+b+c+d=1$; $\dfrac{1}{a+b+c+d}=1$.

Ответ: 1 ч.

428. Пусть производительность первого студента — x, производительность второго студента — y, производительность первого школьника — z, производительность второго школьника — t.

Необходимо найти $\dfrac{10}{x+y+z+t}$.

По условию $\begin{cases} x+z+t=\dfrac{10}{7}, \\ y+z+t=\dfrac{10}{10}, \\ x+y=\dfrac{10}{12}. \end{cases}$

Тогда $2(x+y)+2(z+t)=\dfrac{10}{7}+\dfrac{10}{10}+\dfrac{10}{12}$, $x+y+z+t=\dfrac{1370}{840}$;

$\dfrac{10}{x+y+z+t}=\dfrac{840}{137}$.

Тогда все вместе они решат 10 задач за $\frac{840}{137}$ минут.

Ответ: $\frac{840}{137}$ мин.

429. Пусть производительность 1-го садовника — x, производительность 2-го садовника — y, производительность 3-го садовника — z, производительность 4-го садовника — t.

По условию $\begin{cases} x + y = \frac{7}{120}, \\ y + z + t = \frac{9}{200}, \\ z + x + t = \frac{4}{75}. \end{cases}$

Найти $\frac{1}{x+y+z+t}$.

Сложим уравнения системы: $2x + 2y + 2z + 2t = \frac{7}{120} + \frac{9}{200} + \frac{4}{75}$,

$2(x+y+z+t) = \frac{94}{600}$, $x+y+z+t = \frac{47}{600}$, $\frac{1}{x+y+z+t} = \frac{600}{47}$ часа.

Ответ: $\frac{600}{47}$ часа.

430. Пусть первоначальная скорость такси x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, тогда на путь из A в B было потрачено $\frac{200}{x}$ часов, а обратный путь водитель прошёл за $1 + \frac{200-x}{x-20}$ часов. Зная, что обратный путь занял на $\frac{1}{4}$ часа больше, составим уравнение:

$1 + \frac{200-x}{x-20} = \frac{200}{x} + \frac{1}{4}$; $\frac{200-x}{x-20} - \frac{200}{x} = -\frac{3}{4}$;

$\frac{200x - x^2 - 200x + 4000}{x(x-20)} = -\frac{3}{4}$; $x \neq 0, x \neq 20$.

$4(-x^2 + 4000) = -3(x^2 - 20x)$, $-4x^2 + 16000 = -3x^2 + 60x$,

$x^2 + 60x - 16000 = 0$, по теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 100$, $x_2 = -160$ (не удовлетворяет условию задачи).

Ответ: 100 км/ч.

431. Пусть расстояние AB равно x км, тогда на этот путь затрачено $\frac{x}{80}$ часов, а на обратный — $\frac{30}{40} + \frac{x-30}{90} = \frac{3}{4} + \frac{x-30}{90}$ часа. Зная, что на обратный путь водитель затратил на $\frac{5}{18}$ часа меньше, составим уравнение: $\frac{x}{80} - \frac{3}{4} - \frac{x-30}{90} = \frac{5}{18}$; $\frac{x}{80} - \frac{x-30}{90} = \frac{5}{18} + \frac{3}{4}$; $\frac{x}{80} - \frac{x-30}{90} = \frac{37}{36}$;
$\frac{9x-8x+240}{720} = \frac{37}{36}$; $x + 240 = 37 \cdot 20$; $x = 500$.
Расстояние между пунктами — 500 км.

Ответ: 500 км.

432. Обозначим через D место встречи поездов. Пусть расстояние $AD = x$ км, а $BD = y$ км (см. рис. 196), тогда $v_I = \frac{y}{50}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а $v_{II} = \frac{x}{8}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
Первый поезд прошёл путь AD за $\frac{50x}{y}$ часов, второй поезд прошёл путь BD за $\frac{8y}{x}$ часов. Зная, что до встречи они шли одно и то же время, составим уравнение: $\frac{50x}{y} = \frac{8y}{x}$.

Обозначим $\frac{x}{y} = u$; $50u = \frac{8}{u}$; $50u^2 = 8$; $u^2 = \frac{8}{50}$, $u > 0$; $u = \frac{2}{5}$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ или $\frac{y}{x} = 2{,}5$.

Рис. 196

Первый поезд прошёл до встречи в 2,5 раза меньший путь, чем ему осталось пройти, значит, он потратил на него в 2,5 раза меньше времени, то есть $50 : 2{,}5 = 20$ часов.

Ответ: 20.

433. Пусть C — место встречи двух велосипедистов. Тогда первый велосипедист проехал расстояние $S_2 = CB$ за 48 минут, а второй проехал расстояние $S_1 = AC$ за 27 минут. Так как скорости велосипедистов постоянны, то скорость первого велосипедиста $v_1 = \frac{S_2}{48}$, а скорость второго — $v_2 = \frac{S_1}{27}$. Тогда первый затратил на дорогу до встречи $\frac{S_1}{v_1}$ минут, а второй — $\frac{S_2}{v_2}$ минут. Однако каждый из велосипедистов доехал до места встречи от пункта своего отправления за одно и то же время. Поэтому $\frac{S_1}{v_1} = \frac{S_2}{v_2}$, откуда $\frac{S_1}{\frac{S_2}{48}} = \frac{S_2}{\frac{S_1}{27}} \Rightarrow \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \frac{27}{48}, \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \frac{9}{16}, \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{4}$.

Следовательно, время от начала движения велосипедистов до их встречи равно $\frac{S_1}{v_1} = 48 \cdot \frac{S_1}{S_2} = 48 \cdot \frac{3}{4} = 36$ минут.

Ответ: 36.

434. Пусть в начале пути в трамвай село x пассажиров. Тогда, согласно условию, следующая последовательность соответствует количеству пассажиров в трамвае после каждой остановки: x; $x + 8 - 2 = x + 6$; $x + 6 + 8 - 4 = x + 10$; $x + 10 + 8 - 6 = x + 12$; $x + 12 + 8 - 8 = x + 12$; $x + 12 + 8 - 10 = x + 10$; $x + 10 + 8 - 12 = x + 6$; $x + 6 + 8 - 14 = x$; $x + 8 - 16 = x - 8$. Так как по условию на последней остановке было 25 человек, то $x - 8 = 25$; $x = 33$. Следовательно, наибольшее количество пассажиров, ехавших в трамвае, было $x + 12 = 33 + 12 = 45$ (чел.).

Ответ: 45.

435. Пусть в начале пути в трамвай село x пассажиров. Тогда, согласно условию, следующая последовательность соответствует количеству пассажиров в трамвае после каждой остановки: x; $x + 10 - 6 = x + 4$; $x + 4 + 10 - 8 = x + 6$; $x + 6 + 10 - 10 = x + 6$; $x + 6 + 10 - 12 = x + 4$; $x + 4 + 10 - 14 = x$; $x + 10 - 16 = x - 6$; $x - 6 + 10 - 18 = x - 14$; $x - 14 + 10 - 20 = x - 24$. Так как по условию на последней остановке было 10 человек, то $x - 24 = 10$; $x = 34$. Следовательно, наибольшее количество пассажиров, ехавших в трамвае, было $x + 6 = 34 + 6 = 40$ (чел.).

Ответ: 40.

436. В сутки на табло электронных часов (без секунд) светится хотя бы одна цифра 1:

1) 10 раз, обозначая десятки часов; 2 раза, обозначая единицы часов; всего в течение 12 часов;
2) 10 раз, обозначая десятки минут; 5 раз, обозначая единицы минут; в течение 15 минут каждые 12 часов:
15 мин · 12 = 180 мин = 3 часа.
Итого: 12ч + 3ч = 15 ч.

Ответ: 15.

437. В сутки на табло электронных часов (без секунд) светится хотя бы одна цифра 3:
1) 3 раза, обозначая единицы часов в течение трёх часов;
2) 9 раз, обозначая десятки минут;
3) 6 раз, обозначая единицы минут, в течение 15 минут каждые 21 час:
15 мин · 21 = 315 мин = 5,25 часа.
Итого: 3ч + 5,25 ч = 8,25 ч.

Ответ: 8,25.

438. Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде, по условию $x > 3$.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
по течению	$x+3$	$\frac{39}{x+3}$	39
против течения	$x-3$	$\frac{28}{x-3}$	28
в озере	x	$\frac{70}{x}$	70

Зная, что моторная лодка прошла путь по течению реки и против течения реки за то же время, за которое она могла пройти путь по озеру, составим и решим уравнение:

$\frac{39}{x+3} + \frac{28}{x-3} = \frac{70}{x}$, $39x \cdot (x-3) + 28x \cdot (x+3) = 70 \cdot \left(x^2 - 9\right)$,
$39x^2 - 117x + 28x^2 + 84x = 70x^2 - 630$, $3x^2 + 33x - 630 = 0$,
$x^2 + 11x - 210 = 0$.
По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = 10$, $x_2 = -21$ не удовлетворяет условию $x > 3$. 10 км/ч — скорость лодки в стоячей воде.

Ответ: 10 км/ч.

439. Пусть x км/ч — скорость байдарки в стоячей воде, тогда $(x+2)$ км/ч составит скорость байдарки по течению, а $(x-2)$ км/ч — скорость против течения реки. $\frac{25}{x}$ ч — время, которое затратил турист, плывя по озеру, $\frac{9}{x-2}$ ч — время движения против течения реки, $\frac{56}{x+2}$ ч — время движения по течению. По условию задачи турист плыл по озеру и против течения реки столько же времени, сколько плыл по течению. Составим и решим уравнение:

$\frac{25}{x}+\frac{9}{x-2}=\frac{56}{x+2}$, $x>2$, $25(x^2-4)+9x(x+2)=56x(x-2)$,
$25x^2-100+9x^2+18x=56x^2-112x$, $22x^2-130x+100=0$,
$11x^2-65x+50=0$, $D=65^2-44\cdot 50=4225-2200=2025$, $x_{1,2}=\frac{65\pm 45}{22}$,
$x_1=\frac{110}{22}=5$, $x_2=\frac{20}{22}=\frac{10}{11}$ не удовлетворяет условию $x>2$.
5 км/ч — скорость байдарки в стоячей воде.

Ответ: 5 км/ч.

440. Пусть x кг — масса меди в сплаве, тогда $(x+5)$ кг — первоначальная масса сплава; $\frac{x}{x+5}\cdot 100\%$ — процентное содержание меди в первоначальном сплаве; $(x+20)$ кг — масса нового сплава; $\frac{x}{x+20}\cdot 100\%$ — процентное содержание меди в новом сплаве.
По условию содержание меди понизилось на 30%. Составим и решим уравнение:

$\frac{x}{x+5}\cdot 100-\frac{x}{x+20}\cdot 100=30$, $x>0$; $\frac{10x}{x+5}-\frac{10x}{x+20}=3$;
$10x^2+200x-10x^2-50x=3(x+5)(x+20)$; $150x=3(x+5)(x+20)$; $x^2+25x-50x+100=0$; $x^2-25x+100=0$; $x_1=5$, $x_2=20$. Оба числа удовлетворяют условию $x>0$. Первоначальная масса сплава могла быть либо 10 кг, либо 25 кг.

Ответ: 10 кг, 25 кг.

441. Пусть x г — масса серебра в сплаве, тогда $(x+80)$ г — первоначальная масса сплава, $\frac{80}{x+80}\cdot 100\%$ — процентное содержание золота в первоначальном сплаве, $(x+180)$ г — масса сплава после добавления

100 г золота, тогда $\frac{180}{x+180} \cdot 100\%$ — процентное содержание золота в новом сплаве. По условию содержание золота в сплаве по сравнению с первоначальным повысилось на 20%. Составим и решим уравнение:

$\frac{180}{x+180} \cdot 100 - \frac{80}{x+80} \cdot 100 = 20$, $\frac{900}{x+180} - \frac{400}{x+80} = 1$,

$900x + 72000 - 400x - 72000 = x^2 + 260x + 14400$, $x^2 - 240x + 14400 = 0$, $(x-120)^2 = 0$, $x = 120$. 120 г серебра было в сплаве.

Ответ: 120.

442. $420 \cdot \frac{4}{7} = 240$ км было пройдено за изначально намеченное время со скоростью x км/ч. С увеличенной скоростью $(x+10)$ км/ч было пройдено $420 - 240 = 180$ км.

Планируемое время $\frac{180}{x}$ на $\frac{1}{4}$ больше реального времени $\frac{180}{x+10}$. Составляем уравнение: $\frac{180}{x} - \frac{180}{x+10} = \frac{1}{4}$. Умножим обе части на $4x^2 + 40$.

$720x + 7200 - 720x = x^2 + 10x$,

$x^2 + 10x - 7200 = 0$.

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = -90$, $x_2 = 80$.

По смыслу задачи $x = 80$ км/ч — исходная скорость. Тогда общее время движения $420 : 80 = 5{,}25$ ч.

Ответ: 5,25.

443. Пусть до начала матча x часов.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
пешком	5	$x+1$	$5(x+1)$
на велосипеде	10	$x - \frac{1}{2}$	$10\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Зная, что путь от дома болельщика до стадиона один и тот же, составим и решим уравнение:

$5(x+1) = 10\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $x + 1 = 2x - 1$; $x = 2$.

2 часа до начала матча.

Ответ: 2.

444. Пусть x км/ч — скорость пешехода, y км/ч — скорость велосипедиста.

1. Велосипедист отправился в путь на 1 час раньше пешехода, и они встретятся через 2 часа после выезда велосипедиста. Отсюда следует, что пешеход прошёл x км, а велосипедист проехал $2y$ км, значит, $x + 2y = 28$.
2. Пешеход выйдет на 1 час раньше велосипедиста, и через 2 часа после выхода пешехода расстояние между ними сократится в 3,5 раза. Отсюда следует, что пешеход прошёл $2x$ км, а велосипедист проехал y км, значит, $2x + y = 28 - \frac{28}{3{,}5}$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 28, & \vert -2 \\ 2x + y = 20. \end{cases}$$

Сложим $-2x - 4y = -56$ и $2x + y = 20$. Получим $-3y = -36$; $y = 12$.
Подставим $y = 12$ во второе уравнение системы и найдём x:
$2x + 12 = 20$; $2x = 8$; $x = 4$.
4 км/ч — скорость пешехода, 12 км/ч — скорость велосипедиста.

Ответ: 12 км/ч; 4 км/ч.

445. Пусть x г — масса первого раствора, y г — масса второго раствора, тогда $0{,}3x$ г — масса кислоты в первом растворе, $0{,}5y$ г — масса кислоты во втором растворе, $(0{,}3x + 0{,}5y)$ г — масса кислоты в смеси, что по условию задачи составляет 45% массы раствора. Составим уравнение:
$0{,}3x + 0{,}5y = 0{,}45(x + y)$; $0{,}5y - 0{,}45y = 0{,}45x - 0{,}3x$; $0{,}05y = 0{,}15x$; $y = 3x$; $x : y = 1 : 3$.

Ответ: $1 : 3$.

446. Пусть x г — масса первого сплава, y г — масса второго сплава, тогда $0{,}4x$ г — масса меди в первом сплаве, $0{,}6y$ г — масса меди во втором сплаве, $(0{,}4x+0{,}6y)$ г — масса меди после того, как соединили два сплава, что по условию задачи составляет 45% массы вновь полученного сплава:
$0{,}4x + 0{,}6y = 0{,}45 \cdot (x + y)$; $0{,}6y - 0{,}45y = 0{,}45x - 0{,}4x$; $0{,}15y = 0{,}05x$; $3y = x$; $x : y = 3 : 1$.

Ответ: $3 : 1$.

447. Пусть первоначальная скорость катера — x км/ч. Тогда за 3 часа катер прошёл $3x$ км. Оставшееся расстояние $(87{,}5 - 3x)$ км он прошёл за $\frac{87{,}5 - 3x}{x + 2}$ часа. Так как 87,5 км катер должен был проплыть за $\frac{87{,}5}{x}$ часа, то получаем уравнение: $3 + \frac{1}{3} + \frac{87{,}5 - 3x}{x + 2} = \frac{87{,}5}{x}$; $x > 0$; $\frac{87{,}5 - 3x}{x + 2} = \frac{87{,}5 \cdot 3 - 10x}{3x}$; $(87{,}5 - 3x) \cdot 3x = (87{,}5 \cdot 3 - 10x)(x + 2)$;

$87{,}5 \cdot 3x - 9x^2 = 87{,}5 \cdot 3x - 10x^2 + 2 \cdot 87{,}5 \cdot 3 - 20x$; $x^2 + 20x - 525 = 0$; $x_1 = 15$; $x_2 = -35$.
Так как $x > 0$, то первоначальная скорость катера 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

448. Пусть t минут — время до встречи пешеходов; v_A, v_B — скорости пешеходов, вышедших из пунктов A и B соответственно (см. рис. 197), тогда

$$\begin{cases} v_A \cdot t = 12v_B, \\ v_B \cdot t = 27v_A; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{12}{t}, \\ \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{t}{27}; \end{cases}$$

$t^2 = 27 \cdot 12$; $t > 0$; $t = \sqrt{27 \cdot 12} = \sqrt{3^4 \cdot 4} = 2 \cdot 9 = 18$.
Через 18 минут после выхода пешеходы встретились.
1) $18 + 12 = 30$ (мин) — время пешехода, который вышел из пункта B.
2) $18 + 27 = 45$ (мин) — время пешехода, который вышел из пункта A.

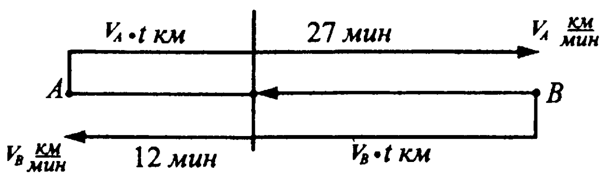


Рис. 197

Ответ: 30 мин, 45 мин.

449. Пусть x г меди и y г цинка находятся в первоначальном куске сплава, тогда $(x+y)$ г — масса сплава. После увеличения количества меди на 40% масса меди в новом сплаве составила $1{,}4x$ г, а после уменьшения количества цинка в новом сплаве масса цинка составила $0{,}6y$ г; $(1{,}4x + 0{,}6y)$ г — масса нового сплава.

По условию масса куска сплава увеличилась на 20%, значит, составила $1{,}2(x + y)$ г. Получаем уравнение:
$1{,}2(x + y) = 1{,}4x + 0{,}6y$; $1{,}2y - 0{,}6y = 1{,}4x - 1{,}2x$; $0{,}6y = 0{,}2x$; $3y = x$.

Отсюда следует, что $\dfrac{x}{y} = 3 : 1$, значит, меди было 75%, а цинка — 25% в первоначальном куске сплава.

Ответ: медь — 75%, цинк — 25%.

450. Пусть в прошлом сезоне продали n абонементов, выручка составила $8000n$ рублей. В настоящем сезоне продали $0{,}75n$ абонементов, стои-

мость одного абонемента увеличили на x рублей, значит, $(8000+x)\cdot 0{,}75n$ рублей — выручка в настоящем сезоне. По условию выручка уменьшилась на $2,5\%$ по сравнению с прошлым сезоном, значит, она составила $8000n\cdot 0{,}975$ рублей. Составим и решим уравнение:
$(8000+x)\cdot 0{,}75n = 8000n\cdot 0{,}975$, $0{,}75x = 8000\cdot 0{,}225$, $x = 2400$.

На 2400 рублей увеличили стоимость абонемента.

Ответ: 2400.

451. Обозначим через $S_{\text{неч.}}$ сумму членов, стоящих на нечётных местах среди первых 12 членов арифметической прогрессии, а через $S_{\text{чёт.}}$ сумму членов, стоящих на чётных местах среди первых 12 членов арифметической прогрессии. Тогда условие задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} S_{\text{неч.}} + S_{\text{чёт.}} = 354, \\ \dfrac{S_{\text{чёт.}}}{S_{\text{неч.}}} = \dfrac{32}{27}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{\text{чёт.}} = \dfrac{32}{27}S_{\text{неч.}}, \\ S_{\text{неч.}} + \dfrac{32}{27}S_{\text{неч.}} = 354 \end{cases} \Rightarrow$$

$\dfrac{59}{27}S_{\text{неч.}} = 354 \Rightarrow S_{\text{неч.}} = \dfrac{354\cdot 27}{59} = 162$. Тогда $S_{\text{чёт.}} = 354 - S_{\text{неч.}} =$
$= 354 - 162 = 192$.

Если a_k — k-й член арифметической прогрессии, а d — её разность, то $S_{\text{неч.}} = \dfrac{a_1 + a_1 + 2d\cdot 5}{2}\cdot 6 = 6a_1 + 30d$, так как числа, стоящие на нечётных местах арифметической прогрессии $\{a_k\}$, также составляют арифметическую прогрессию, но с разностью $2d$. Аналогично получим, что
$S_{\text{чёт.}} = \dfrac{a_2 + a_2 + 2d\cdot 5}{2}\cdot 6 = 6a_2 + 30d$.

Поэтому $S_{\text{чёт.}} - S_{\text{неч.}} = (6a_2 + 30d) - (6a_1 + 30d) = 6(a_2 - a_1) = 6d$. Так как $S_{\text{чёт.}} - S_{\text{неч.}} = 30$, то $6d = 30 \Rightarrow d = 5$.

Ответ: 5.

452. Пусть v_A км/ч ($v_A > 0$) и v_B км/ч ($v_B > 0$) — скорости поездов, которые одновременно отправились навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно (см. рис. 198).
1) $(v_A + v_B)$ км/ч — скорость сближения, $2(v_A + v_B)$ км — расстояние между пунктами. По условию расстояние составляет 180 км.
$2(v_A + v_B) = 180$.
2) $\dfrac{2v_A}{v_B}$ ч — время движения после встречи поезда, который вышел из пункта B.

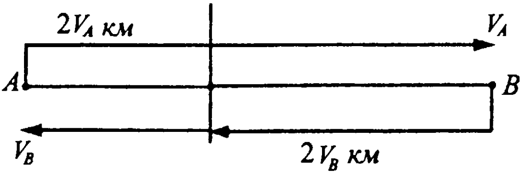


Рис. 198

$\dfrac{2v_B}{v_A}$ ч — время движения после встречи поезда, который вышел из пункта A.

По условию второй поезд прибыл в пункт A на 54 мин раньше, чем первый в пункт B.

$\dfrac{2v_B}{v_A} - \dfrac{2v_A}{v_B} = \dfrac{54}{60}$.

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ \dfrac{2v_B}{v_A} - \dfrac{2v_A}{v_B} = \dfrac{9}{10}. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы найдём отношение $\dfrac{v_B}{v_A}$.

Обозначим $\dfrac{v_B}{v_A} = t, t > 0$.

$2t - \dfrac{2}{t} = \dfrac{9}{10}$; $2t^2 - \dfrac{9}{10}t - 2 = 0$; $20t^2 - 9t - 20 = 0$; $t_1 = \dfrac{5}{4}$; $t_2 = -\dfrac{4}{5}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$, значит, $\dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{5}{4}$.

Вернёмся к исходной системе:

$$\begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ \dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{5}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} v_A + v_B = 90, \\ v_A = 0{,}8v_B; \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}8v_B + v_B = 90, \\ v_A = 0{,}8v_B, \end{cases}$$

$v_B = 50$, $v_A = 40$. 40 км/ч — скорость поезда, который вышел из пункта A, 50 км/ч — скорость поезда, который вышел из пункта B.

Ответ: 40 км/ч; 50 км/ч.

453. v_A км/ч — скорость пешехода, который вышел из пункта A (первый); v_B км/ч — скорость пешехода, который вышел из пункта B (второй).

3 часа 45 минут $= 3\dfrac{45}{60}$ часа $= 3\dfrac{3}{4}$ часа $= 3{,}75$ часа — время до встречи пешеходов. Пусть t часов ($t > 0$) — время в пути второго пешехода;

$(t+4)$ — время в пути первого пешехода (см. рис. 199), тогда

$$\begin{cases} 3{,}75v_A = v_B(t-3{,}75), \\ 3{,}75v_B = v_A(t+4-3{,}75); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{t-3{,}75}{3{,}75}, \\ \dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{3{,}75}{t+0{,}25}; \end{cases}$$

$\dfrac{t-3{,}75}{3{,}75} = \dfrac{3{,}75}{t+0{,}25}$, $t > 0$. $t^2 + 0{,}25t - 3{,}75t - 0{,}9375 = 14{,}0625$;

$t^2 - 3{,}5t - 15 = 0$; $2t^2 - 7t - 30 = 0$; $t_1 = 6$, $t_2 = -\dfrac{5}{2}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$.

6 часов был в пути второй пешеход, 10 часов был в пути первый пешеход.

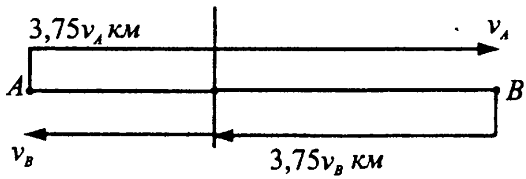


Рис. 199

Ответ: 10 ч; 6 ч.

454. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость поезда после остановки, тогда $(x-10)$ км/ч — скорость поезда до остановки. Так как 420 км составляют 60% всего пути, то весь путь AB равен $\dfrac{420}{0{,}6} = 700$ км. После остановки поезду осталось проехать $700 - 420 = 280$ км. Следовательно, остаток пути поезд должен был проехать за $\dfrac{280}{x-10}$ ч, но, потеряв 0,5 ч, он проехал его за $\dfrac{280}{x}$ ч. Таким образом, получаем уравнение $\dfrac{280}{x-10} - \dfrac{280}{x} = 0{,}5$; $x_1 = -70$ и $x_2 = 80$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 80 км/ч.

455. Пусть первая швея может выполнить всю работу за x дней ($x > 0$), а вторая — за y дней ($y > 0$). Тогда их производительность — $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$ всей работы в день. Можно составить следующие уравнения, приняв всю работу за 1:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{10}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{y} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим:

$\dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{10} = 0$; $\dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{10}$; $y = 40$.

Подставим это значение в первое уравнение системы:

$\dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{6}{x} = \dfrac{1}{4}$; $x = 24$.

Итак, первая швея может сделать всю работу за 24 дня, а вторая — за 40 дней.

Ответ: 24, 40.

456. Примем объём работы за 1.

Пусть первая машинистка сможет перепечатать рукопись за x дней ($x > 0$), вторая машинистка — за y дней ($y > 0$), $\dfrac{1}{x}$ — производительность первой машинистки, а $\dfrac{1}{y}$ — производительность второй. По условию задачи, работая вместе, они могут перепечатать рукопись за 6 часов; $6\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1$.

Если машинистки будут работать вместе 5 часов, то они напечатают $5\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ часть работы, а если вторая машинистка будет работать 3 часа, она напечатает $\dfrac{3}{y}$ часть работы. По условию задачи работа при этом будет завершена.

$5\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{3}{y} = 1$.

Учитывая, что $x > 0$, $y > 0$, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 1, \\ 5\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{3}{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{5}{6} + \dfrac{3}{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{18}, \\ y = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = 18. \end{cases}$$

За 9 часов первая машинистка может перепечатать рукопись, за 18 часов перепечатает рукопись вторая машинистка.

Ответ: 9 ч; 18 ч.

457. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки первого мотоциклиста. Второй мотоциклист был в пути на 6 минут меньше, поэтому $\left(t - \frac{1}{10}\right)$ часов — время поездки второго мотоциклиста. Скорость второго мотоциклиста — 1,25 v км/ч. Учитывая, что $t > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} vt = 30, \\ 1{,}25v\left(t - \frac{1}{10}\right) = 30; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{30}{t}, \\ 1{,}25 \cdot \frac{30}{t} \cdot \left(t - \frac{1}{10}\right) = 30. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы имеем:

$1{,}25 - \frac{0{,}125}{t} = 1$; $\frac{0{,}125}{t} = 0{,}25$; $t = \frac{0{,}125}{0{,}25} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 60$ км/ч. Таким образом, 60 км/ч — скорость первого мотоциклиста, а скорость второго равна $v \cdot 1{,}25 = 75$ км/ч.

Ответ: 60 км/ч; 75 км/ч.

458. Пусть v км/мин — скорость первого пешехода, а t мин — потраченное им на дорогу время. Тогда для второго пешехода время, потраченное им на дорогу, составляет $(t - 20)$ мин, а его скорость — $\frac{6}{5}v$ км/мин. Учитывая, что $t > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} vt = 40, \\ \frac{6}{5}v(t - 20) = 40; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{40}{t}, \\ \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{t} \cdot (t - 20) = 1; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6}{5} - 1\right)t = 24 \Rightarrow$$

$t = 120$.

Ответ: 120.

459. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки первого грузовика соответственно. Тогда время поездки второго грузовика $\left(t - \frac{1}{2}\right)$ ч, а его скорость — $\frac{6}{5}v$ км/ч. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} vt = 150, \\ \frac{6}{5}v(t-0{,}5) = 150; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{150}{t}, \\ \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{t}\cdot(t-0{,}5) = 1; \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{6}{5}-1\right)t = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$t = 3.$

Ответ: 3.

460. Пусть v км/ч и t ч — скорость и время поездки второго автомобиля соответственно. Тогда время поездки первого автомобиля $\left(t-\frac{5}{6}\right)$ ч, а его скорость — 1,5 v км/ч. Составим и решим систему:

$$\begin{cases} vt = 250, \\ 1{,}5v\left(t-\frac{5}{6}\right) = 250; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{250}{t}, \\ 1{,}5\cdot\frac{1}{t}\cdot\left(t-\frac{5}{6}\right) = 1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1{,}5-1)t = \frac{5}{6}\cdot 1{,}5 \Rightarrow t = \frac{5}{2}.$$

Ответ: 2,5.

461. Пусть x км/ч ($x > 12$) — скорость мотоциклиста после остановки, тогда $(x-12)$ км/ч — скорость мотоциклиста до остановки. После остановки мотоциклисту осталось проехать 36% пути, то есть $0{,}36\cdot 300 = 108$ км. Следовательно, остаток пути мотоциклист должен был проехать за $\frac{108}{x-12}$ ч, но, потеряв 18 мин (= 0,3 ч), он проехал его за $\frac{108}{x}$ ч. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{108}{x-12} - \frac{108}{x} = 0{,}3;\ \frac{36}{x-12} - \frac{36}{x} = 0{,}1;\ \frac{432}{x^2-12x} = 0{,}1;$$

$x^2 - 12x - 4320 = 0$; $x_1 = -60$ и $x_2 = 72$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 12$.

Ответ: 72 км/ч.

462. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость поезда до остановки, тогда $(x+10)$ км/ч — скорость поезда после остановки. Так как 420 км составляет 60% всего пути, то весь путь AB равен $\frac{420}{0{,}6} = 700$ км. После остановки поезду осталось проехать $700 - 420 = 280$ км. Следовательно, остаток пути поезд должен был проехать за $\frac{280}{x}$ ч, но, потеряв 0,5 ч, он проехал его за $\frac{280}{x+10}$ ч. Таким образом, получаем уравнение $\frac{280}{x} - \frac{280}{x+10} = 0{,}5;$

$\frac{560}{x} - \frac{560}{x+10} = 1$; $\frac{5600}{x^2+10x} = 1$; $x_1 = -80$ и $x_2 = 70$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 70 км/ч.

463. 1) Автомобиль двигался на $30 + 25 + 25 = 80$ (мин) $= 1\frac{1}{3}$ часа меньше, чем автобус. Пусть t — время движения автомобиля, тогда автобус двигался $t + 1\frac{1}{3}$ часов.

2) Если скорость автомобиля v км/ч, то скорость автобуса $0{,}6\ v$ км/ч. Так как автомобиль и автобус проехали одно и то же расстояние, то получаем уравнение $\left(t + \frac{4}{3}\right) \cdot 0{,}6v = vt$.

Сокращая на v $(v \neq 0)$, получаем $(3t + 4) \cdot 0{,}2 = t$; $3t + 4 = 5t$; $t = 2$.

3) Теперь найдём скорость автомобиля и автобуса:

$v_{\text{автом.}} = \frac{200}{2} = 100$ км/ч, $v_{\text{автоб.}} = \dfrac{200}{2 + \frac{4}{3}} = 60$ км/ч.

Ответ: 100; 60.

464. 1) Автомобиль двигался на $25 + 26 - 3 = 48$ (мин) $= \frac{4}{5}$ часа меньше, чем велосипедист. Пусть t — время движения автомобиля, тогда велосипедист двигался $t + \frac{4}{5}$ часов.

2) Если скорость велосипедиста v км/ч, то скорость автомобиля $2{,}5v$ км/ч. Так как автомобиль и велосипедист проехали одно и то же расстояние, то получаем уравнение $\left(t + \frac{4}{5}\right) \cdot v = 2{,}5vt$. Сокращая на v $(v \neq 0)$, получаем: $t + \frac{4}{5} = 2{,}5t$; $t = \frac{8}{15}$.

3) Теперь найдём скорость автомобиля и велосипедиста:

$v_{\text{автом.}} = \dfrac{64}{\frac{8}{15}} = 120$ (км/ч), $v_{\text{вел.}} = \dfrac{64}{\frac{8}{15} + \frac{4}{5}} = 48$ (км/ч).

Ответ: 120; 48.

465. Пусть x — расстояние между городами A и B, а v $(v > 0)$ — скорость велосипедиста. Тогда скорость мотоциклиста — $3v$. Время, которое затратит велосипедист на преодоление половины пути, будет равно

$\frac{x}{2v}$, а время, которое затратит мотоциклист на преодоление того же расстояния, соответственно равно $\frac{x}{2 \cdot 3v}$. Имеем первое уравнение системы: $\frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3$. Во втором случае время велосипедиста, затраченное на преодоление расстояния $\left(\frac{x}{2} - 15\right)$, равно $\frac{x}{2v} - \frac{15}{v}$, а время мотоциклиста, затраченное на преодоление расстояния $\frac{x}{2} + 15$ км, равно $\frac{x}{2 \cdot 3v} + \frac{15}{3v}$. Составляем второе уравнение системы: $\frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2$.

Учитывая, что $v > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3, \\ \frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2v} = \frac{x}{6v} + 3, \\ \frac{x}{2v} - \frac{15}{v} = \frac{x}{6v} + \frac{15}{3v} + 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + 18v, \\ 3x - 90 = x + 30 + 12v; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 18v, \\ 2x = 12v + 120; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ x = 6v + 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ 9v = 6v + 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9v, \\ 3v = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 180, \\ v = 20. \end{cases}$$

Ответ: 180 км.

466. Обозначим скорость первого поезда через v_1 км/ч, скорость второго — через v_2 км/ч. Первый поезд проходит расстояние между станциями за $\frac{96}{v_1}$ часов, второй — за $\frac{96}{v_2}$ часов. Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{96}{v_1} + \frac{2}{3} = \frac{96}{v_2}, \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(96 + \frac{2v_1}{3}\right) \cdot v_2 = 96v_1, \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 48v_2 + \frac{1}{3}(v_2 + 12)v_2 = 48(v_2 + 12), \\ v_1 = v_2 + 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}v_2^2 + 4v_2 - 576 = 0, \\ v_1 = v_2 + 12. \end{cases}$$

Корнями уравнения $v_2^2 + 12v_2 - 1728 = 0$ являются числа 36 и -48. Второе из них не подходит по смыслу задачи. Итак, $v_2 = 36$ км/ч, $v_1 = 48$ км/ч.

Ответ: 36 км/ч; 48 км/ч.

467. Пусть скорость первого поезда равна v_1 км/ч ($v_1 > 0$), а скорость второго равна v_2 км/ч ($v_2 > 0$). Тогда время, затрачиваемое первым поездом на преодоление 720 км, составляет $\frac{720}{v_1}$ ч, а время, затрачиваемое вторым поездом на преодоление того же расстояния, равно $\frac{720}{v_2}$ ч. Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{720}{v_1} = \dfrac{720}{v_2} - 2, \\ \dfrac{60}{v_1} = \dfrac{50}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{720}{v_1} = \dfrac{720}{v_2} - 2, \\ v_2 = \dfrac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{720}{v_1} = \dfrac{864}{v_1} - 2, \\ v_2 = \dfrac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{144}{v_1} = 2, \\ v_2 = \dfrac{5}{6}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 72, \\ v_2 = 60. \end{cases}$$

Ответ: 72 км/ч; 60 км/ч.

468. Пусть скорость первого поезда равна v_1 км/ч ($v_1 > 0$), а скорость второго — v_2 км/ч ($v_2 > 0$). Тогда время, затрачиваемое первым поездом на преодоление 450 км, составляет $\frac{450}{v_1}$ ч, а время, затрачиваемое вторым поездом на преодоление того же расстояния, равно $\frac{450}{v_2}$ ч.

Учитывая, что $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{450}{v_2} - 1{,}5, \\ \dfrac{250}{v_1} = \dfrac{200}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{450}{v_2} - 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{450}{v_1} = \dfrac{562{,}5}{v_1} - 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{112{,}5}{v_1} = 1{,}5, \\ v_2 = \dfrac{4}{5}v_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 75, \\ v_2 = 60. \end{cases}$$

Ответ: 75 км/ч; 60 км/ч.

469. Пусть x кг — количество варенья, которое было у Малыша первоначально, а y кг — количество варенья, которое Малыш с Карлсоном взяли с собой на крышу. Тогда в доме Малыша Карлсон съел $0{,}3x$ кг варенья, и из условия задачи имеем уравнение $0{,}3x + 0{,}2 + y + 1{,}7 = x$, (1). Поскольку из взятого на крышу варенья Малыш съел 0,3 кг, то Карлсон съел

$(y-0{,}3)$ кг варенья. Тогда $0{,}3x+y-0{,}3$ (кг) — общее количество съеденного Карлсоном варенья, и по условию $y-0{,}3=\frac{1}{3}\cdot(0{,}3x+y-0{,}3)$ (2). Из уравнения (2) выразим y через x: $y-0{,}3=0{,}1x+\frac{1}{3}y-0{,}1$; $\frac{2}{3}y=0{,}1x+0{,}2$; $y=\frac{3}{2}\cdot(0{,}1x+0{,}2)=0{,}15x+0{,}3$. Подставим найденное для y выражение в уравнение (1) и решим полученное уравнение: $0{,}3x+0{,}2+0{,}15x+0{,}3+$ $+1{,}7=x$; $0{,}45x+2{,}2=x$; $0{,}55x=2{,}2$; $x=4$. Таким образом, у Малыша первоначально было 4 кг варенья.

Ответ: 4 кг.

470. Пусть x км — протяжённость всего выбранного туристами маршрута, а y км — протяжённость части маршрута, оставшейся после четырёх дней похода. Тогда из условия задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 20+0{,}3(x-20)+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x+y=x, \\ y=0{,}8y+2. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $0{,}2y=2$, $y=10$. Подставив найденное значение y в первое уравнение, получаем

$20+\frac{3x}{10}-6+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+10=x$; $\frac{12x+10x+8x}{40}+24=x$; $x-\frac{3}{4}x=24$; $x=96$.

Итак, протяжённость всего выбранного туристами маршрута составляет 96 км.

Ответ: 96 км.

471. Пусть x литров — объём первого ведра, а y литров — объём второго. Время, необходимое для того, чтобы набрать оба ведра из первого крана, равно $\frac{x+y}{5}$ минут. А время, необходимое для того, чтобы набрать первое ведро из второго крана, равно $\frac{x}{7}$ минут. Отсюда получаем $\frac{x+y}{5}=2\cdot\frac{x}{7}$; $7(x+y)=10x$; $7y=3x$.

Таким образом, $\frac{x}{y}=\frac{7}{3}$.

Ответ: $\frac{7}{3}$.

472. Пусть скорость лодки x км/ч ($x > 0$), тогда скорость катера $4x$ км/ч. Тогда время, затрачиваемое катером на прохождение 16 километров, равно $\frac{16}{4x}$ часов, а время, затрачиваемое лодкой, — $\frac{16}{x}$ часов. Отсюда получаем $\frac{16}{4x} + 3 = \frac{16}{x}$; $\frac{12}{x} = 3$; $x = 4$.

Ответ: 4 км/ч.

473. Пусть первый рабочий может наклеить обои в комнате за x часов ($x > 0$), тогда второй рабочий наклеит обои за $x + 5$ часов. Всю работу примем за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первого рабочего, $\frac{1}{x+5}$ — производительность второго. Так как, работая вместе, они наклеят обои за 6 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{6}$. Таким образом, имеем $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$; $\frac{2x+5}{x(x+5)} = \frac{1}{6}$; $x(x+5) = 6(2x+5)$; $x^2 - 7x - 30 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 10$. $x_1 = -3$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 10$. Таким образом, первый рабочий может выполнить работу за 10 ч, второй — за 15 ч.

Ответ: 10 ч, 15 ч.

474. Пусть первая бригада может вспахать поле за x часов ($x > 0$), тогда вторая бригада может вспахать поле за $x + 12$ часов. Примем всю работу за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первой бригады, а $\frac{1}{x+12}$ — производительность второй. Так как, работая вместе, они вспахали поле за 8 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{8}$. Таким образом, имеем $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$; $\frac{2x+12}{x(x+12)} = \frac{1}{8}$; $x(x+12) = 8(2x+12)$; $x^2 - 4x - 96 = 0$; $x_1 = -8$, $x_2 = 12$. $x_1 = -8$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть $x = 12$; первая бригада может вспахать поле за 12 ч, вторая — за 24 ч.

Ответ: 12 ч; 24 ч.

475. Пусть первый токарь может выполнить задание за x часов ($x > 0$), тогда второй токарь может выполнить задание за $x + 7$ часов. Всю работу примем за 1, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первого токаря, $\frac{1}{x+7}$ — производительность второго. Так как, работая вместе, они выполнили задание за 12 ч, то их совместная производительность равна $\frac{1}{12}$. Таким образом, имеем

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{12}$; $\frac{2x+7}{x(x+7)}=\frac{1}{12}$; $x(x+7)=12(2x+7)$; $x^2-17x-84=0$; $x_1=-4$, $x_2=21$. $x_1=-4$ не удовлетворяет условию $x>0$, то есть $x=21$; первый токарь может выполнить задание за 21 ч, второй — за 28 ч.

Ответ: 21 ч; 28 ч.

476. Пусть x страниц в час печатала первая машинистка, тогда вторая в час печатала $(x-2)$ страницы. Так как вторая машинистка работала на 1 час дольше, то получаем уравнение $\frac{60}{x-2}-\frac{60}{x}=1$, $(x>2)$. Отсюда имеем $\frac{60x-60(x-2)}{(x-2)x}=1$; $120=(x-2)x$; $x^2-2x-120=0$; $x_1=-10$, $x_2=12$. $x_1=-10$ не удовлетворяет условию $x>2$, значит, первая машинистка печатала $x=12$ страниц в час.

Ответ: 12.

477. Пусть t часов — время, которое будет находиться в пути Петя до того момента, когда его догонит Вася. Тогда Вася, до того как догонит Петю, будет находиться в пути $\left(t-\frac{1}{3}\right)$ часов. Всего Петя пройдёт $4{,}5t$ км, а Вася проедет $12\left(t-\frac{1}{3}\right)$ км. Решим уравнение:

$4{,}5t=12\left(t-\frac{1}{3}\right)$; $4{,}5t=12t-4$; $7{,}5t=4$; $t=\frac{8}{15}$. Следовательно, Вася догонит Петю на расстоянии $\frac{4{,}5\cdot 8}{15}=0{,}3\cdot 8=2{,}4$ км от школы.

Ответ: 2,4 км.

478. Пусть t часов — время, которое будет находиться в пути Нина до того момента, когда её догонит брат. Тогда брат, до того как догонит Нину, будет находиться в пути $(t-0{,}1)$ часов. Следовательно, Нина проедет $15t$ км, а брат проедет $40(t-0{,}1)$ км. Решим уравнение: $15t=40(t-0{,}1)$; $15t=40t-4$; $25t=4$; $t=\frac{4}{25}$. Итак, брат догонит Нину на расстоянии $15t=15\cdot\frac{4}{25}=2{,}4$ км от дома.

Ответ: 2,4.

479. Пусть x км/ч — первоначальная скорость автобуса, а S км — расстояние между городами, тогда $S = 8x$. Из условия следует, что после снижения скорости до $(x - 10)$ км/ч (через 5 ч после начала движения) автобус проехал оставшуюся часть пути за $\left(3 + \frac{1}{3}\right)$ часа. Таким образом, имеем $S = 5x + \frac{10}{3}(x - 10)$; $5x + \frac{10}{3}x - \frac{100}{3} = 8x$; $\frac{x}{3} = \frac{100}{3}$; $x = 100$; то есть первоначальная скорость автобуса равна 100 км/ч.

Ответ: 100.

480. Пусть x км/ч — первоначальная скорость велосипедиста, а S км — расстояние, проезжаемое велосипедистом, тогда $S = 2x$. Из условия следует, что после снижения скорости до $(x - 3)$ км/ч (через 1,5 ч после начала движения) велосипедист проехал оставшуюся часть пути за 40 мин $= \frac{2}{3}$ часа. Таким образом, имеем $S = 1{,}5x + \frac{2}{3}(x - 3)$; $1{,}5x + \frac{2}{3}x - 2 = 2x$; $\frac{x}{6} = 2$; $x = 12$, то есть первоначальная скорость велосипедиста равна 12 км/ч.

Ответ: 12.

481. Пусть x км/ч $(x > 0)$ — первоначальная скорость поезда, тогда $x+6$ км/ч — скорость поезда после задержки. Так как весь путь AB равен 78 км, а до задержки поезд проехал на 12 км больше, чем после задержки, то длина пути, пройденного до задержки, равна $\frac{78 + 12}{2} = 45$ км. Тогда после задержки поезду осталось проехать $78-45 = 33$ км. Следовательно, первую часть пути поезд проехал за $\frac{45}{x}$ ч, а вторую часть — за $\frac{33}{x + 6}$ ч. По условию первый отрезок времени больше второго на 15 мин $(= 0{,}25$ ч). Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{45}{x} - \frac{33}{x+6} = 0{,}25;\ \frac{180}{x} - \frac{132}{x+6} = 1;\ \frac{48x + 1080}{x^2 + 6x} = 1;\ x^2 - 42x - 1080 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение, применяя формулу с чётным коэффициентом при x, и получаем корни $x_1 = -18$ и $x_2 = 60$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 60 км/ч.

482. Пусть x км/ч $(x > 75)$ — скорость третьего мотоциклиста, тогда его скорость сближения с первым мотоциклистом равна $(x - 75)$ км/ч, а со

вторым — $(x-60)$ км/ч. За 20 мин ($=\frac{1}{3}$ ч), к моменту, когда третий мотоциклист выехал из пункта A, первый мотоциклист проехал $\frac{1}{3}\cdot 75 = 25$ (км), а второй — $\frac{1}{3}\cdot 60 = 20$ (км). Следовательно, третий мотоциклист догонит первого за $\frac{25}{x-75}$ ч, а второго за $\frac{20}{x-60}$ ч. По условию первый отрезок времени больше второго на 1 ч. Таким образом, получаем уравнение
$\frac{25}{x-75} - \frac{20}{x-60} = 1$; $\frac{5x}{(x-75)(x-60)} = 1$; $x^2 - 140x + 4500 = 0$.

Решаем квадратное уравнение, применяя формулу с чётным коэффициентом при x, и получаем корни $x_1 = 50$ и $x_2 = 90$. Первый корень не удовлетворяет условию $x > 75$.

Ответ: 90 км/ч.

483. Пусть s — расстояние между A и B. Тогда $\frac{s}{5}$ — скорость движения парохода по течению (собственная скорость парохода плюс скорость течения реки), а $\frac{s}{7}$ — скорость движения парохода против течения (собственная скорость парохода минус скорость течения реки). Определим скорость течения реки: $\left(\frac{s}{5} - \frac{s}{7}\right) : 2 = \frac{s}{35}$. Следовательно, плоты от A до B плывут $s : \frac{s}{35} = 35$ суток.

Ответ: 35.

484. Пусть s — расстояние между A и B. Тогда $\frac{s}{4}$ — скорость движения моторной лодки по течению (собственная скорость моторной лодки плюс скорость течения реки), а $\frac{s}{5}$ — скорость движения моторной лодки против течения (собственная скорость моторной лодки минус скорость течения реки). Определим скорость течения реки: $\left(\frac{s}{4} - \frac{s}{5}\right) : 2 = \frac{s}{40}$. Следовательно, скорость движения моторной лодки по течению больше скорости течения в $\frac{s}{4} : \frac{s}{40} = 10$ раз.

Ответ: 10.

485. Пусть второй насос перекачивает ежечасно x м^3 ($x > 10$), тогда он работал $\frac{480}{x}$ часов. Тогда первый насос перекачивает $(x - 10)$ м^3 в час, и, значит, он работал $\frac{360}{x-10}$ часов. По условию задачи известно, что первый насос работал дольше, чем второй, на 2 часа, то есть имеем уравнение $\frac{360}{x-10} - \frac{480}{x} = 2$; $\frac{360x - 480(x-10)}{(x-10)x} = 2$; $2x^2 - 20x = 4800 - 120x$; $x^2 + 50x - 2400 = 0$; $x_1 = -80$, $x_2 = 30$. $x_1 = -80$ не удовлетворяет условию $x > 10$, то есть второй насос перекачивает за час $x = 30$ м^3; при этом первый насос перекачивает 20 м^3.

Ответ: 20 и 30.

486. Пусть второй насос перекачивает ежечасно x м^3 ($x > 0$), тогда 100 м^3 он перекачивает за $\frac{100}{x}$ часов. Тогда первый насос перекачивает $(x + 5)$ м^3/ч, значит, 90 м^3 он перекачивает за $\frac{90}{x+5}$ часов. По условию задачи известно, что первый насос перекачивает 90 м^3 на 1 час быстрее, чем второй 100 м^3, значит, имеем уравнение $\frac{90}{x+5} + 1 = \frac{100}{x}$; $\frac{100(x+5) - 90x}{x(x+5)} = 1$; $x^2 + 5x = 10x + 500$; $x^2 - 5x - 500 = 0$; $x_1 = -20$, $x = 25$. $x_1 = -20$ не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть второй насос перекачивает $x = 25$ м^3/ч; при этом первый насос перекачивает 30 м^3.

Ответ: 30 и 25.

487. Обозначим через x и y количество первого и второго растворов соответственно ($x > 0$, $y > 0$). Тогда из условия следует уравнение
$\frac{0{,}4x + 0{,}7y}{x+y} = 0{,}6$; $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

Ответ: 1 : 2.

488. Обозначим через x и y количество первого и второго сплавов соответственно ($x > 0$, $y > 0$). Тогда из условия следует уравнение
$\frac{0{,}25x + 0{,}45y}{x+y} = 0{,}3$; $\frac{x}{y} = 3$.

Ответ: 3 : 1.

489. Пусть x и y — количество первого и второго сплава соответственно ($x > 0, y > 0$). Тогда концентрация железа в новом сплаве составит $\frac{0{,}75x + 0{,}25y}{x+y} = 0{,}4 \Leftrightarrow 0{,}35x = 0{,}15y$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{7}$.

Ответ: 3 : 7.

490. Пусть x и y — количество первого и второго растворов соли соответственно ($x > 0$, $y > 0$). Тогда концентрация соли в новом растворе составит $\frac{0{,}64x + 0{,}36y}{x+y} = 0{,}48 \Leftrightarrow 0{,}16x = 0{,}12y$; $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$.

Ответ: 3 : 4.

491. Пусть x — скорость парохода по течению, y — скорость против течения. В задаче требуется найти $k = \frac{x}{y}$, ($k > 1$) (см. рис. 200).

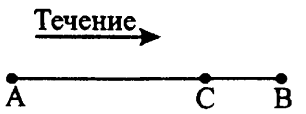


Рис. 200

По условию задачи имеем $\frac{AB}{x} = 2$; $\frac{BC}{y} = 2$. Кроме того, $\frac{BC}{x} + \frac{AB}{y} = 5$. Отсюда $AB = 2x$, $BC = 2y$, $\frac{2y}{x} + \frac{2x}{y} = 5$. Составим уравнение: $\frac{2}{k} + 2k = 5$; $2k^2 - 5k + 2 = 0$. Корни: $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Так как $k > 1$, то $k = 2$. Значит, скорость парохода по течению в два раза больше скорости парохода против течения.

Ответ: 2.

492. Пусть x — скорость грузовика при движении с горы, y — скорость при движении в гору. В задаче требуется найти $k = \frac{x}{y}$ ($k > 1$). Обозначим, согласно условию задачи: A и B — конечные точки движения и C — нижняя точка (см. рис. 201).

Тогда имеем $\frac{AC}{x} = 3$; $\frac{CB}{y} = 7$; $\frac{BC}{x} + \frac{CA}{y} = 22$. Откуда $\frac{7y}{x} + \frac{3x}{y} = 22$; $\frac{7}{k} + 3k = 22$; $3k^2 - 22k + 7 = 0$. Корни: $k_1 = 7$, $k_2 = \frac{1}{3}$. Так как $k > 1$, то

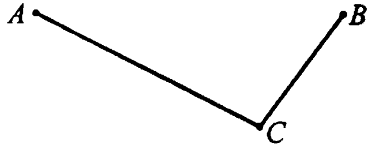


Рис. 201

$k = 7$. Значит, скорость грузовика при движении с горы в семь раз больше скорости грузовика при движении в гору.

Ответ: 7.

493. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, y км/ч — скорость автобуса; C — место их встречи. Тогда $\frac{AC}{x}$ (ч) и $\frac{CB}{y}$ (ч) — время, проведённое в пути до встречи автомобилем и автобусом соответственно; $\frac{AC}{y}$ (ч) и $\frac{CB}{x}$ (ч) — время, проведённое в пути после встречи автомобилем и автобусом соответственно. По условию $\frac{AC}{y} = 9$; $\frac{CB}{x} = 4$; $\frac{AC}{x} = \frac{CB}{y}$; $x > 0$; $y > 0$. Отсюда $\frac{9y}{x} = \frac{4x}{y}$; $4x^2 = 9y^2$; $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Так как $x > 0$; $y > 0$, то $\frac{x}{y} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

494. Пусть x км/ч — скорость автомобиля, y км/ч — скорость автобуса, C — место их встречи (см. рис. 202).

Рис. 202

Требуется найти $\frac{AB}{y}$ — время в пути автобуса. Так как они выехали из пунктов A и B одновременно, то до места встречи в пути они были одинаковое время: $\frac{AC}{x} = \frac{BC}{y}$. Из условия задачи следует, что $\frac{AC}{y} = 16$ и $\frac{BC}{x} = 4$, отсюда $AC = 16y$; $BC = 4x$. Следовательно, $\frac{16y}{x} = \frac{4x}{y}$;

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 4, (x > 0, y > 0)$; $\frac{x}{y} = 2$. Так как $AB = AC + BC$, то

$\frac{AB}{y} = \frac{AC + BC}{y} = \frac{16y + 4x}{y} = 16 + 4 \cdot \frac{x}{y} = 16 + 4 \cdot 2 = 24$ (часа).

Ответ: 24.

495. Пусть x, y, z — производительность первого, второго и третьего рабочих (объём работ/день) соответственно ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$). Весь объём работ примем за 1. Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 3, \\ \frac{1}{x+z} = 3, \\ \frac{1}{y+z} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{3}, \\ x + z = \frac{1}{3}, \\ y + z = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Сложим все три уравнения системы:

$2(x + y + z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; $x + y + z = \frac{5}{12}$. Поэтому, работая втроём, рабочие выполнят всю работу за $\frac{1}{x+y+z} = \frac{12}{5} = 2{,}4$ ч.

Ответ: 2,4.

496. Пусть x, y, z — производительность первого, второго и третьего рабочих соответственно. Весь объём работ примем за 1. Тогда из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 18, \\ \frac{1}{x+z} = 12, \\ \frac{1}{y+z} = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{18}, \\ x + z = \frac{1}{12}, \\ y + z = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Требуется найти $\frac{1}{x+y+z}$. Сложим все три уравнения полученной системы: $2(x + y + z) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{1}{4}$. Значит, $x + y + z = \frac{1}{8}$. А искомое значение $\frac{1}{x+y+z} = 8$ (ч).

Ответ: 8.

497. Обозначим через x и y стоимость 1 кг первого и второго продуктов соответственно. Тогда из условия задачи $x + 10y = 200$. Первый продукт подорожал на 15%, то есть его стоимость составила $x + \frac{15}{100}x = 1{,}15x$. Второй продукт подешевел на 25%, то есть его стоимость составила $y - \frac{25}{100}y = 0{,}75y$. Поэтому $1{,}15x + 10 \cdot 0{,}75y = 182$. Эти два условия должны выполняться одновременно: $\begin{cases} x + 10y = 200, \\ 1{,}15x + 7{,}5y = 182; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 - 10y, \\ 1{,}15(200 - 10y) + 7{,}5y = 182. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $230 - 11{,}5y + 7{,}5y = 182$; $y = 12$. Тогда из первого уравнения $x = 200 - 120 = 80$. Итак, $x = 80$, $y = 12$.

Ответ: 80 и 12.

498. Пусть в 100 г первого раствора было x г соли (x%-ный раствор), а в 100 г второго раствора — y г соли (y%-ный раствор). Тогда до испарения в 1000 г первого раствора содержалось $10x$ г соли, а в 1000 г второго раствора — $10y$ г соли. После испарения такое же количество соли стало содержаться соответственно в 800 г каждого раствора, то есть концентрация соли в каждом растворе увеличилась в $\frac{1000}{800} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ раза. Пусть также до испарения мы брали a г второго раствора (и $2a$ г первого), а после испарения b г второго раствора (и $4b$ г первого). Составим и решим систему уравнений, учитывая, что концентрация соли в смеси будет 10%:

$$\begin{cases} \dfrac{2a \cdot (x/100) + a \cdot (y/100)}{3a} = 0{,}1, \\ \dfrac{4b \cdot (1{,}25x/100) + b \cdot (1{,}25y/100)}{5b} = 0{,}1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 30, \\ 5x + 1{,}25y = 50; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 20. \end{cases}$$

Ответ: 5 и 20.

499. Пусть первый поезд проходит путь от A до B за t_1 ч ($t_1 > 0$), а второй поезд путь от B до A — за t_2 ч ($t_2 > 0$). Если обозначить расстояние от A до B (или от B до A) через s км, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{t_1}{2} - 2 = \dfrac{t_2}{2}, \\ \left(\dfrac{s}{t_1} + \dfrac{s}{t_2}\right) \cdot 2 = s - \dfrac{s}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 + 4, \\ 8(t_1 + t_2) = 3t_1 t_2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 + 4, \\ 3t_2^2 - 4t_2 - 32 = 0. \end{cases}$$

Корнями последнего уравнения являются $t_2 = 4$ и $t_2 = -\frac{8}{3}$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи. Значит, $t_2 = 4$ ч. Отсюда $t_1 = 8$ ч.

Ответ: 8 и 4.

500. Пусть скорость велосипедиста равна v_1 км/ч, а скорость мотоциклиста — v_2 км/ч. По условию велосипедист проезжает каждую минуту на 500 м меньше, чем мотоциклист. Это соответствует тому, что его скорость на $\dfrac{\frac{1}{2}\text{ км}}{\frac{1}{60}\text{ ч}} = 30$ км/ч меньше скорости мотоциклиста. Тогда имеем систему уравнений $\begin{cases} v_1 + 30 = v_2, \\ \dfrac{120}{v_1} - 2 = \dfrac{120}{v_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = v_1 + 30, \\ v_1^2 + 30v_1 - 1800 = 0. \end{cases}$

Корнями последнего уравнения являются $v_1 = 30$ и $v_1 = -60$. Второй корень, очевидно, не удовлетворяет условию задачи. Значит, $v_1 = 30$. Из первого уравнения $v_2 = 60$.

Ответ: 30 и 60.

501. Имеется 200 граммов 30%-го раствора. Значит, кислоты в них $\dfrac{200 \cdot 30}{100} = 60$ (г). Обозначим через x количество воды (в граммах), которое нужно долить, чтобы получился 6%-ный раствор. Тогда $\dfrac{60}{200 + x} = \dfrac{6}{100}$. Отсюда $x = 800$ (г).

Ответ: 800.

502. Имеется 300 граммов 20%-го раствора кислоты с водой. Значит, кислоты в этом растворе $300 \cdot \dfrac{20}{100} = 60$ (г). Обозначим через x количество воды (в граммах), которое нужно добавить в имеющийся раствор, чтобы получился 16%-ный раствор. Тогда $\dfrac{60}{300 + x} = \dfrac{16}{100}$. Отсюда $x = 75$ (г).

Ответ: 75.

503. Пусть первый экскаватор, работая один, вырыл яму за x часов, тогда второй вырыл бы её за $3x$ часов. $\frac{49}{x}$м^3/ч — производительность первого экскаватора, а $\frac{49}{3x}$м^3/ч — производительность второго экскаватора. Так как их совместная производительность равна $49 : 1{,}5 = \frac{98}{3}$(м^3/ч), получим уравнение $\frac{49}{x} + \frac{49}{3x} = \frac{98}{3}$; $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{2}{3}$; $x = 2$.

Первый экскаватор вырыл бы яму за 2 часа, а половину ямы за 1 час, тогда второй вырыл бы яму за 6 часов, а половину — за 3 часа. Если бы каждый по очереди вырыл бы половину ямы, то они вырыли бы яму за $1 + 3 = 4$(ч).

Ответ: 4.

504. Пусть скорость перевозки зерна второго грузовика — x (т/ч), тогда скорость первого — $2{,}5x$ (т/ч). Имеем $(2{,}5x + x) \cdot 3 = 31{,}5$, откуда $x = 3$. Первый грузовик привёз бы 21 т зерна за $\frac{21}{7{,}5} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ (ч), а второй — 10,5 т за $\frac{10{,}5}{3} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ (ч). Общее время равно $3\frac{1}{2} + 2\frac{4}{5} = 6\frac{3}{10} = 6{,}3$ (ч).

Ответ: 6,3.

505. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость первого поезда, а y км/ч ($y > 0$) — скорость второго поезда. За $\frac{840}{x}$ часов пройдёт 840 км первый поезд, а за $\frac{840}{y}$ часов пройдёт это же расстояние второй поезд.

По условию задачи первый поезд затратит времени на 2 часа меньше, чем второй, значит, $\frac{840}{y} - \frac{840}{x} = 2$. За $\frac{63}{x}$ часов пройдёт 63 км первый поезд, за $\frac{54}{y}$ часов пройдёт 54 км второй поезд.

По условию время, затраченное поездами, одинаково, значит, $\frac{63}{x} = \frac{54}{y}$. Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 63 \cdot \dfrac{1}{x} = 54 \cdot \dfrac{1}{y}, \\ 840 \cdot \dfrac{1}{y} - 840 \cdot \dfrac{1}{x} = 2. \end{cases}$$

Замена $\dfrac{1}{x} = a$; $\dfrac{1}{y} = b$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} 7a = 6b, \\ 420b - 420a = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6}{7}b, \\ 60b = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{70}, \\ b = \dfrac{1}{60}. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем $x = 70$; $y = 60$.

Тогда 70 км/ч — скорость первого поезда; 60 км/ч — скорость второго поезда, $70 - 60 = 10$ (км/ч).

Ответ: 10.

506. Пусть x км/ч ($x > 0$) — скорость лодки по течению, y км/ч ($y > 0$) — скорость лодки против течения. Так как 12 мин $= \dfrac{1}{5}$ ч, 40 мин $= \dfrac{2}{3}$ ч, 52 мин $= \dfrac{13}{15}$ ч, то $\dfrac{1}{5} \cdot x$ км — путь, пройденный одной лодкой по течению; $\dfrac{2}{3} \cdot y$ км — путь, пройденный другой лодкой против течения; $\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{x}{y}$ ч — время, затраченное одной лодкой на обратный путь против течения; $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{y}{x}$ ч — время, затраченное другой лодкой на обратный путь по течению.

Зная, что время, затраченное лодками на обратный путь, в сумме равно $\dfrac{13}{15}$ часа, составим и решим уравнение: $\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{x}{y} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{15}$. Обозначим искомое отношение скорости лодки по течению к скорости лодки против течения через t, имеем $\dfrac{x}{y} = t, t > 1$. Тогда уравнение примет вид $\dfrac{1}{5}t + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{t} = \dfrac{13}{15}$; $3t^2 - 13t + 10 = 0$; $t_1 = \dfrac{10}{3}$, $t_2 = 1$ — не удовлетворяет условию $t > 1$.

Ответ: $\dfrac{10}{3}$.

507. Пусть x — концентрация первого раствора в процентах, y — второго. Из условия задачи следует

$$\begin{cases} 2\frac{x}{100} + 6\frac{y}{100} = \frac{36}{100} \cdot (2+6), \\ \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = \frac{32}{100} \cdot (1+1). \end{cases}$$

Во втором уравнении считаем (не нарушая общности), что первого и второго раствора берут по одному килограмму.

$$\begin{cases} 2x + 6y = 36 \cdot 8, \\ x + y = 32 \cdot 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6(64 - x) = 288, \\ y = 64 - x. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = 24$. Зная x, из второго уравнения получаем $y = 40$.

Ответ: 24 и 40.

508. Пусть для получения 30%-го раствора нужно взять x кг 28%-го раствора и y кг 36%-го раствора. Тогда $0{,}28x + 0{,}36y = 0{,}3(x + y)$; $0{,}02x = 0{,}06y$; $\frac{x}{y} = 3$. То есть для получения раствора нужной концентрации нужно взять три части 28%-го раствора и одну часть 36%-го раствора. Так как первого раствора имеется всего 2 кг, то, чтобы получить наибольший объём 30%-го раствора, нужно взять 2 кг 28%-го раствора и $y = \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$ (кг) 36%-го раствора. Тогда общее количество раствора будет равно $x + y = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$ (кг).

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

509. Пусть К — красный грузовик, а С — синий, x ч — время, за которое синий грузовик вывозит груз с первого склада ($x > 0$). Составим таблицу:

	1-й склад	2-й склад
К	3	$x - 7$
С	x	6

Имеем теперь пропорцию:

$\frac{3}{x} = \frac{x-7}{6}$; $x^2 - 7x - 18 = 0$; $x_1 = 9$, $x_2 = -2$. Так как по условию задачи x — число положительное, то $x = 9$. Таким образом, синий грузовик может вывезти груз с первого склада быстрее, чем это сделает красный, в $\frac{9}{3} = 3$ раза.

Ответ: 3.

510. Пусть x — время, за которое второй кран разгрузит баржу ($x > 0$). Рассмотрим таблицу:

	баржа	сухогруз
I кран	3	$x - 10$
II кран	x	8

Составим пропорцию: $\frac{3}{x} = \frac{x-10}{8}$; $x^2 - 10x - 24 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 12$. Так как x не может быть меньше нуля, то $x = 12$.

Примем всю работу по разгрузке баржи за единицу. Тогда $p_1 = \frac{1}{3}$ — производительность крана I, $p_2 = \frac{1}{12}$ — производительность крана II. Искомая величина $\frac{p_1}{p_2} = 4$.

Ответ: 4.

511. Пусть V — собственная скорость лодки, V_T — скорость течения реки. Тогда из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} \frac{6}{V+V_T} + \frac{6}{V-V_T} = \frac{35}{60}, \\ \frac{18}{V-V_T} - \frac{18}{V+V_T} = \frac{15}{60}. \end{cases}$$ Обозначим $\frac{1}{V+V_T} = a$ и $\frac{1}{V-V_T} = b$.

Тогда $$\begin{cases} a+b = \frac{7}{72}, \\ b-a = \frac{1}{72}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{72}, \\ b = \frac{4}{72}. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным V и V_T, получим

$$\begin{cases} \frac{1}{V+V_T} = \frac{3}{72}, \\ \frac{1}{V-V_T} = \frac{4}{72}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V+V_T = 24, \\ V-V_T = 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2V_T = 6, \\ V = 18 + V_T; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_T = 3, \\ V = 21. \end{cases}$$

Ответ: 21.

512. Пусть V — собственная скорость катера, V_T — скорость течения реки. Тогда из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{36}{V-V_T}+\dfrac{36}{V+V_T}=3\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{12}{V-V_T}-\dfrac{12}{V+V_T}=\dfrac{10}{60}. \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{1}{V-V_T}=a$ и $\dfrac{1}{V+V_T}=b$.

Тогда $\begin{cases} 36a+36b=\dfrac{7}{2}, \\ 12a-12b=\dfrac{1}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{18}, \\ b=\dfrac{1}{24}. \end{cases}$

Возвращаясь к переменным V и V_T, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V-V_T}=\dfrac{1}{18}, \\ \dfrac{1}{V+V_T}=\dfrac{1}{24}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V-V_T=18, \\ V+V_T=24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_T=V-18, \\ 2V=42; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_T=3, \\ V=21. \end{cases}$$

Ответ: 21.

513. Пусть x км/ч — скорость первого туриста, y км/ч — скорость второго туриста. Расстояние, пройденное первым туристом до встречи, равно $3x$ км, а расстояние, пройденное вторым туристом до встречи, равно $2y$ км, ($AC=3x$; $BC=2y$) (см. рис. 203).

Рис. 203

$\dfrac{2y}{x}$ ч —время движения первого туриста на участке BC.

$\dfrac{3x}{y}$ ч —время движения второго туриста на участке AC.

Так как первый турист пришёл в пункт B на 5 часов раньше, чем второй пришёл в пункт A, получим уравнение $\dfrac{3x}{y}-\dfrac{2y}{x}=5$. Пусть $\dfrac{x}{y}=t,\ t>0,$

тогда $3t - \frac{2}{t} = 5$; $3t^2 - 5t - 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию $t > 0$.

Скорость первого туриста в два раза больше скорости второго туриста.

Ответ: 2.

514. Пусть x — время, которое затратил автомобиль на путь от места встречи до пункта А. Этот же участок пути велосипедист проехал за 6 часов. Кроме того, участок пути от места встречи до пункта B автомобиль проехал за 2 часа, а велосипедист — за $(x + 11)$ часов. Получим уравнение $\frac{x}{6} = \frac{2}{x+11}$; $x^2 + 11x - 12 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -12$, которое имеет положительный корень $x = 1$. Значит, скорость автомобиля в 6 раз больше скорости велосипедиста.

Ответ: 6.

515. Пусть p_i — производительность i-й группы программистов, $i = 1, 2, 3$. Тогда из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4(p_1 + p_2 + p_3) = 1, \\ p_2 = 3p_3, \\ \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2 + p_3} = 6. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $p_1 = \frac{1 - 4p_2 - 4p_3}{4}$. Подставляя в третье уравнение системы выражения для p_1 и p_2, получим уравнение $\frac{4}{1 - 16p_3} - \frac{1}{4p_3} = 6 \Leftrightarrow \frac{384p_3^2 + 8p_3 - 1}{4p_3(1 - 16p_3)} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 384p_3^2 + 8p_3 - 1 = 0, \\ p_3 \neq 0, \\ p_3 \neq \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что по смыслу задачи $p_3 > 0$, получим $p_3 = \frac{1}{24}$. Тогда

$$p_2 = 3 \cdot p_3 = \frac{1}{8}, p_1 = \frac{1 - 4 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{24}}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: 12, 8 и 24 месяца.

516. Пусть p_i — производительность i-й группы программистов, $i = 1, 2, 3$. Тогда из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(p_1 + p_2 + p_3) = 1, \\ p_1 = 3p_3, \\ p_1 = p_2 + p_3. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений системы следует, что $4p_1 = 1, p_1 = \frac{1}{4}$. Подставляя во второе уравнение системы p_1, получаем $p_3 = \frac{1}{12}$. Тогда, подставляя p_1 и p_3 в третье уравнение, найдём $p_2 = p_1 - p_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.

Ответ: 4, 6 и 12 месяцев.

517. Пусть v_1, l_1 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) поезда; v_2, l_2 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) электрички. Согласно условию задачи, $v_2 = \frac{1}{2}v_1$; $l_2 = \frac{1}{3}l_1$. Зная, что поезд проходит мимо столба за 5 секунд, имеем $\frac{l_1}{v_1} = 5$. Чтобы определить время, за которое мимо друг друга пройдут поезд и электричка, нужно их общую длину разделить на суммарную скорость (из условия задачи ясно, что поезд и электричка движутся навстречу друг другу), то есть это время равно

$$\frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = \frac{l_1 + \frac{1}{3}l_1}{v_1 + \frac{1}{2}v_1} = \frac{8l_1}{9v_1} = \frac{8 \cdot 5}{9} = \frac{40}{9}\ (\text{с}).$$

Ответ: $\frac{40}{9}$.

518. Пусть v_1, l_1 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) поезда, v_2, l_2 — соответственно скорость (в м/с) и длина (в м) электрички. Согласно условию задачи, $v_1 = v_2$; $l_1 = 1{,}5l_2$. Зная, что электричка проходит мимо столба за 8 секунд, имеем $\frac{l_2}{v_2} = 8$. Чтобы определить время, за которое мимо друг друга пройдут поезд и электричка, нужно их общую длину разделить на суммарную скорость (из условия задачи ясно, что поезд и электричка движутся навстречу друг другу), то есть это время равно

$$\frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} = \frac{1{,}5l_2 + l_2}{v_2 + v_2} = \frac{2{,}5l_2}{2v_2} = \frac{2{,}5 \cdot 8}{2} = 10\,(\text{с}).$$

Ответ: 10.

519. Пусть x — количество стекла первого сорта, y — количество стекла второго сорта, которые надо взять, чтобы получить стекло, пропускающее 60% света. Из условия задачи имеем

$$\frac{0{,}45x + 0{,}8y}{x + y} = 0{,}6;\ 0{,}45x + 0{,}8y = 0{,}6x + 0{,}6y;\ 0{,}15x = 0{,}2y;\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: 4 : 3.

520. Пусть x — количество шоколада с содержанием 25% какао-бобов, y — количество шоколада с содержанием 70% какао-бобов, которые нужно взять, чтобы получить шоколад, содержащий 45% какао-бобов. Из условия задачи следует, что $\frac{0{,}25x + 0{,}7y}{x + y} = 0{,}45;\ 0{,}25x + 0{,}7y =$

$= 0{,}45x + 0{,}45y;\ 0{,}2x = 0{,}25y;\ \frac{x}{y} = \frac{5}{4}.$

Ответ: 5 : 4.

521. Пусть за x дней может вспахать всё поле первый трактор. Тогда за $(x + 2)$ дня может вспахать всё поле второй трактор; $\frac{1}{x}$ — производительность первого трактора (часть поля, которую он вспахивает за один день), $\frac{1}{x+2}$ — производительность второго трактора.

По условию за 4 дня совместной работы было вспахано 0,9 поля. Следовательно, $4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right) = 0{,}9$, где $x > 0$;

$\frac{2x + 2}{x(x + 2)} = \frac{9}{40};\ (2x + 2)40 = 9\left(x^2 + 2x\right);\ 9x^2 - 62x - 80 = 0$. Решением этого уравнения являются $x_1 = 8$, $x_2 = -\frac{10}{9}$. $x_2 = -\frac{10}{9}$ — не удовлетворяет условию $x > 0$. Следовательно, первый трактор вспашет поле за 8 дней, второй — за 10 дней.

Ответ: 8 и 10 дней.

522. Пусть за x дней может перевезти весь груз первый грузовик. Тогда за $(x - 3)$ дня может перевезти весь груз второй грузовик; $\frac{1}{x}$ — производительность первого грузовика, $\frac{1}{x-3}$ — производительность второго грузовика (часть груза, которую он перевозит за один день).

По условию за 5 дней совместной работы грузовики перевезли 0,75 всего груза. Следовательно, $5\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}\right) = 0{,}75$, где $x > 3$;

$\frac{x-3+x}{x(x-3)} = 0{,}15$;

$0{,}15x^2 - 2{,}45x + 3 = 0$. Решением этого уравнения являются $x_1 = 15$, $x_2 = \frac{4}{3}$. Так как должно выполняться неравенство $x > 3$, то $x_2 = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию задачи. Получаем: первый грузовик весь груз может перевезти за 15 дней, второй — за 12 дней.

Ответ: 15 и 12 дней.

523. Для ответа на поставленный в условии вопрос достаточно определить, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ $(a > 0)$ и график функции $y = |x^2 - 4x - 3|$. Графиком функции $y = x^2 - 4x - 3$ является парабола с вершиной, абсцисса которой равна $x_в = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$, а ордината равна $y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = -7$. Отражая часть графика $y = x^2 - 4x - 3$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y = |x^2 - 4x - 3|$, эскиз которого изображён на рисунке 204. Таким образом, при $0 < a < 7$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 4x - 3|$ в четырёх точках, при $a = 7$ — в трёх точках и при $a > 7$ — в двух.

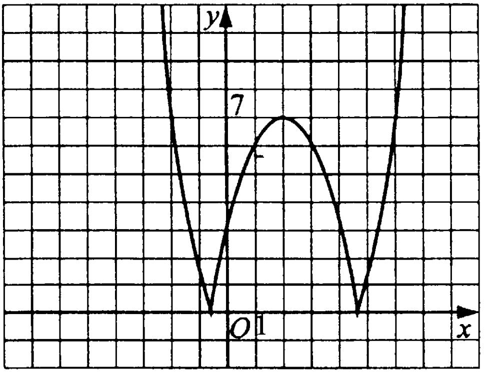


Рис. 204

Ответ: 4 при $0 < a < 7$; 3 при $a = 7$; 2 при $a > 7$.

524. Построим графики функций $y = \left|2x^2+4x-7\right|$; $y = a\,(a > 0)$ и найдём количество точек их пересечения.

1) Построим график $y = 2x^2 + 4x - 7$ (см. рис. 205).

а) Вершина: $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{4} = -1$, $y_0 = 2 - 4 - 7 = -9$. $(-1; -9)$ — координаты вершины параболы.

б) Дополнительные точки:

x	-4	-3	-2	0	1	2
y	9	-1	-7	-7	-1	9

2) Построим график $y = \left|2x^2 + 4x - 7\right|$ (см. рис. 205).

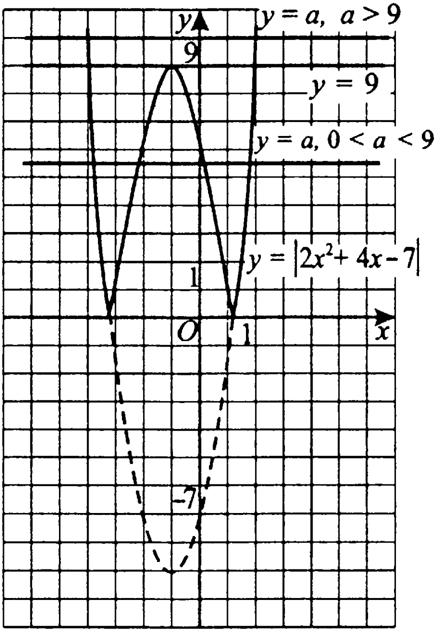


Рис. 205

Получаем, что графики данных функций пересекаются в четырёх точках при $0 < a < 9$, в трёх точках при $a = 9$, в двух точках при $a > 9$.

Ответ: 4 при $0 < a < 9$; 3 при $a = 9$; 2 при $a > 9$.

525. Построим ломаную, заданную условием

$$y = \begin{cases} -3x - 4, \text{ если } x < -2, \\ 2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x - 4, \text{ если } x > 2. \end{cases} \quad \text{(см. рис. 206).}$$

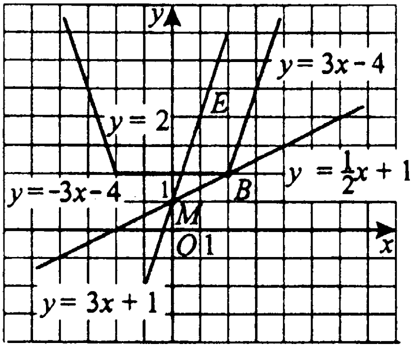


Рис. 206

Проводим прямую MB, проходящую через точки с координатами (0; 1) и (2; 2). Эта прямая задаётся уравнением $y = \frac{1}{2}x + 1$ и имеет угловой коэффициент $k_1 = \frac{1}{2}$. Проведём прямую ME, проходящую через точку с координатами (0; 1) параллельно прямой $y = 3x - 4$. Очевидно, угловой коэффициент этой прямой $k_2 = 3$. При положительном k прямая $y = kx + 1$ пересекает ломаную в двух точках, если она лежит внутри угла BME. Следовательно, $k_1 < k < k_2$; $\frac{1}{2} < k < 3$.

Ответ: (0,5; 3).

526. Построим ломаную, заданную условием
$$y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x < -2, \\ -1, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -x + 1, \text{ если } x > 2. \end{cases} \quad \text{(см. рис. 207).}$$

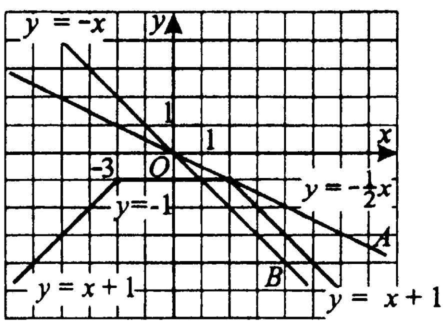


Рис. 207

Проводим прямую OA, проходящую через начало координат и точку с координатами $(2; -1)$. Эта прямая задаётся уравнением $y = -\frac{1}{2}x$ и имеет угловой коэффициент $k_1 = -\frac{1}{2}$. Проведём прямую OB, проходящую через начало координат параллельно прямой $y = -x + 1$. Угловой коэффициент этой прямой $k_2 = -1$. При отрицательном значении k прямая $y = kx$ пересекает ломаную в двух точках, если она лежит внутри угла AOB. Следовательно, $k_2 < k < k_1$; $-1 < k < -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(-1; -0{,}5)$.

527. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = 0{,}3x + p$ с осями координат.

1) С осью Ox: $y = 0$; $0{,}3x + p = 0$; $x = -\frac{10p}{3}$; $\left(-\frac{10p}{3}; 0\right)$.

2) С осью Oy: $x = 0$; $y = p$; $(0; p)$.

3) Прямая $y = 0{,}3x + p$ образует с осями координат прямоугольный треугольник (см. рис. 208) с катетами $\left|-\frac{10p}{3}\right|$ и $|p|$. По условию площадь треугольника равна 60; $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3}|p| \cdot |p| = \frac{5}{3}p^2$. Из уравнения $\frac{5}{3}p^2 = 60$ находим $p = \pm 6$.

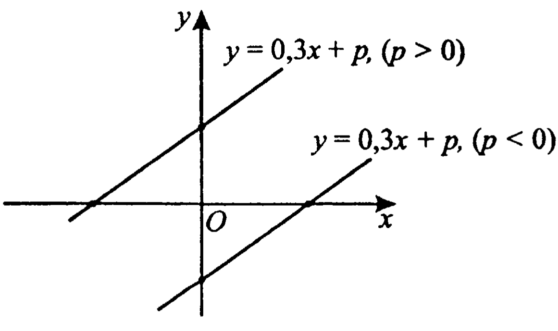


Рис. 208

Ответ: ± 6.

528. $y = -2x + p$, $S_{\triangle AOB} = 49$, $S_{\triangle AOB} = \frac{|AO| \cdot |BO|}{2}$ (см. рис. 209).

Найдём координаты точек:

а) A: $A(0; y)$. $y = -2x + p$, $x = 0$, $y = p$, $A(0; p)$;

б) B: $B(x; 0)$. $y = -2x + p$, $-2x + p = 0$, $x = \frac{1}{2}p$, $B\left(\frac{1}{2}p; 0\right)$.

$$S_{OAB} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{2},\ S_{OAB} = \frac{|p| \cdot \frac{1}{2} \cdot |p|}{2},\ \frac{1}{4}p^2 = 49,\ p^2 = 4 \cdot 49,\ p = \pm 14.$$

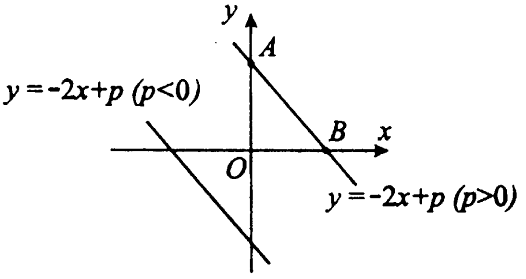


Рис. 209

Ответ: -14; 14.

529. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = -1{,}5x + n$ с осями координат.

С осью Ox: $\left(\frac{2}{3}n; 0\right)$, с осью Oy: $(0; n)$.

Прямая $y = -1{,}5 + n$ образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $\left|\frac{2}{3}n\right|$ и $|n|$.

По условию площадь треугольника равна 75.

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot |n| \cdot |n| = \frac{1}{3} \cdot n^2$. Решим уравнение $\frac{1}{3}n^2 = 75$, $n^2 = 225$, $n_{1,2} = \pm 15$.

Ответ: ± 15.

530. Найдём координаты точек пересечения прямой $y = 7x - 2m$ с осями координат.

С осью Ox: $\left(\frac{2}{7}m; 0\right)$, с осью Oy: $(0; -2m)$.

Прямая $y = 7x - 2m$ образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $\left|\frac{2}{7}m\right|$ и $|-2m|$.

По условию площадь треугольника равна 14.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot|m|\cdot 2\cdot|m| = 14;\ m^2 = \frac{14\cdot 7}{2};\ m^2 = 49;\ m_{1,2} = \pm 7.$

Ответ: ± 7.

531. $2x^2 - \frac{1}{2}x + (k-3)(k+5) = 0.\ x_1 < 2 < x_2$, где x_1 и x_2 — корни.

1) Найдём корни уравнения

$4x^2 - x + 2(k-3)(k+5) = 0,\ x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}}{8}.$

2) Тогда по условию

$$\frac{1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}}{8} < 2 < \frac{1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)} < 16 < 1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{1-32(k-3)(k+5)} < 16, \\ 1+\sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > 16; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{1-32(k-3)-(k+5)} < 15, \\ \sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > 15; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > -15, \\ \sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > 15; \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{1-32(k-3)(k+5)} > 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-32(k-3)(k+5) > 225 \Leftrightarrow 32(k-3)(k+5) < -224 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2+2k-15 < -7 \Leftrightarrow k^2+2k-8 < 0 \Leftrightarrow -4 < k < 2.$$

Ответ: $(-4; 2)$.

532. Введём обозначение $f(x) = x^2 + x + (k-1)(k+7)$. Учитывая, что старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ положителен, можно сделать вывод, что число 3 находится между корнями уравнения $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(3) < 0$.

Решим неравенство $f(3) < 0$, $3^2 + 3 + (k-1)(k+7) < 0$,
$k^2 + 6k - 7 + 12 < 0$, $(k+1)(k+5) < 0$, $-5 < k < -1$.

Ответ: $k \in (-5; -1)$.

533. $9x^2 - 6x - (l-2)(l+2) - 3 = 0$.

Введём обозначение: $f(x) = 9x^2 - 6x - (l-2)(l+2) - 3$,
$f(x) = 9x^2 - 6x - l^2 + 1$. Учитывая, что старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ положителен, можно сделать вывод, что число 2 находится между корнями уравнения $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(2) < 0$ (см. рис. 210).

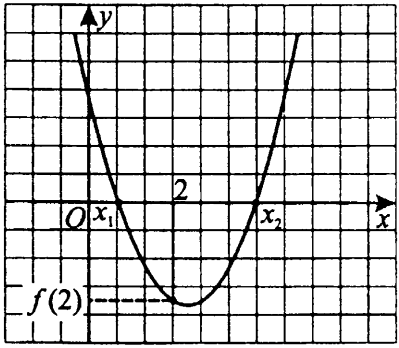


Рис. 210

Решим неравенство $f(2) < 0$. $9 \cdot 4 - 6 \cdot 2 - l^2 + 1 < 0$; $25 - l^2 < 0$; $(l-5)(l+5) > 0$; $l < -5$, $l > 5$ (см. рис. 211).

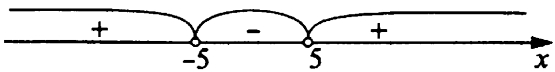


Рис. 211

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

534. Обозначим $y = kx^2 - (k-3)x + k$ (1) и

$y = (2k-1) \cdot x^2 - 2kx + k + \dfrac{9}{4}$ (2).

1) Так как по условию прямая $y = kx + 1$ и парабола (1) имеют ровно две общие точки, то уравнение $kx^2 - (k-3)x + k = kx + 1$ имеет 2 различных действительных корня, значит, $D > 0$.

$kx^2 - 2kx + 3x + k - 1 = 0$; $kx^2 + (3-2k)x + (k-1) = 0$.
$D = (3-2k)^2 - 4k(k-1)$; $9 - 12k + 4k^2 - 4k^2 + 4k > 0$; $-8k + 9 > 0$; $k < \dfrac{9}{8}$.

2) Так как прямая $y = kx + 1$ не пересекает параболу (2), уравнение $(2k-1)x^2 - 2kx + k + \dfrac{9}{4} = kx + 1$ не имеет действительных корней, значит, $D < 0$.

$(2k-1)x^2 - 3kx + k + \dfrac{5}{4} = 0$.

$D = 9k^2 - 4(2k-1)\left(k + \dfrac{5}{4}\right) = 9k^2 - 8k^2 - 10k + 4k + 5 = k^2 - 6k + 5.$

Решим неравенство $k^2 - 6k + 5 < 0$; $(k - 5)(k - 1) < 0$; $1 < k < 5$ (см. рис. 212).

Рис. 212

3) Таким образом, $\begin{cases} k < \dfrac{9}{8}, \\ 1 < k < 5; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < k < \dfrac{9}{8}.$

Ответ: $\left(1; \frac{9}{8}\right)$.

535. Выделим в каждом трёхчлене полный квадрат:
$3\left(4x^2 - 12x + 9 + 2\right)\left(x^2 + 22x + 121 + 4\right) = 24 - a^2$;
$3\left((2x - 3)^2 + 2\right)\left((x + 11)^2 + 4\right) = 24 - a^2$;
$3\left((2x - 3)^2(x + 11)^2 + 4(2x - 3)^2 + 2(x + 11)^2 + 8\right) = 24 - a^2$;
$3(2x - 3)^2(x + 11)^2 + 12(2x - 3)^2 + 6(x + 11)^2 + 24 = 24 - a^2$;
$3(2x - 3)^2(x + 11)^2 + 12(2x - 3)^2 + 6(x + 11)^2 = -a^2$.
Левая часть уравнения принимает положительные значения при любом действительном значении x, правая часть принимает либо отрицательные значения, либо ноль. Следовательно, данное уравнение не имеет корней ни при каких значениях параметра a.

536. Выделим в каждом трёхчлене полный квадрат:
$\left(49x^2 - 112x + 64 + 1\right)\left(x^2 + 26x + 169 + 2\right) = 2 - x^2$;
$\left((7x - 8)^2 + 1\right)\left((x + 13)^2 + 2\right) = 2 - x^2$;
$(7x - 8)^2(x + 13)^2 + 2(7x - 8)^2 + (x + 13)^2 + 2 = 2 - x^2$;
$(7x - 8)^2(x + 13)^2 + 2(7x - 8)^2 + (x + 13)^2 = -x^2$.

Левая часть уравнения принимает положительные значения при любом действительном значении x, правая часть принимает либо отрицательные значения, либо ноль. Следовательно, данное уравнение не имеет корней.

537. Касание прямой и параболы означает, что они имеют лишь одну общую точку (для графиков других функций, отличных от квадратичной, это может быть и не так). То есть нужно определить, при каких значениях параметров k и a уравнение $ax^2 = k(x - a)$ имеет единственный корень. $ax^2 - kx + ka = 0$, $D = k^2 - 4ka^2$, квадратное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $D = 0$, то есть $k(k - 4a^2) = 0$. В случае $k = 0$ прямой, данной в условии, является прямая $y = 0$, ордината точки касания никак не может быть равна 4, то есть $k \neq 0$. Тогда из уравнения $k(k-4a^2)=0$ получаем, что $k=4a^2$. Пусть $(x_0; y_0)$ — точка касания. Абсцисса x_0 точки касания является корнем уравнения $ax^2-kx+ka=0$, и так как $D=0$, то $x_0=\dfrac{k}{2a}=\dfrac{4a^2}{2a}=2a$. Подставляя x_0 в уравнение прямой, получаем ординату точки касания $y_0=k(x_0-a)=4a^2(2a-a)=4a^3$. По условию $y_0=4$, то есть $4a^3=4$; $a=1$; $k=4a^2=4$.

Ответ: $k=4$; $a=1$.

538. По условию прямая $y=kx+b$ касается параболы $y=x^2+bx$, абсцисса точки касания $x=2$.

а) Выразим b через k из уравнения $x^2+bx=kx+b$, зная, что $x=2$: $4+2b=2k+b$, $b=2k-4$.

б) Уравнение $x^2+bx=kx+b$, $x^2+(b-k)x-b=0$ имеет 1 корень, тогда $D=0$. $D=(b-k)^2+4b$, $b^2-2bk+k^2+4b=0$.

в) Найдём b и k из условий а) и б):

$$\begin{cases} b=2k-4, \\ b^2-2bk+k^2+4b=0, \end{cases}$$

$(2k-4)^2-2k\cdot(2k-4)+k^2+4\cdot(2k-4)=0$,

$4k^2-16k+16-4k^2+8k+k^2+8k-16=0$, $k=0$, тогда $b=2\cdot 0-4=-4$.

Ответ: $k=0$; $b=-4$.

539. $x^2-(a+4)x+2a+5=0$, так как уравнение имеет два корня, то $D>0$, $D=(a+4)^2-4(2a+5)$; $a^2+8a+16-8a-20>0$; $a^2-4>0$, кроме того

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geqslant -2;\ \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\geqslant -2;\ \frac{a+4}{2a+5}\geqslant -2;\ \frac{a+4+4a+10}{2a+5}\geqslant 0;$$

$\dfrac{5a+14}{2a+5}\geqslant 0$, таким образом,

$$\begin{cases} a^2-4>0, \\ \dfrac{5a+14}{2a+5}\geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-2)(a+2)>0, \\ \dfrac{5a+14}{2a+5}\geqslant 0. \end{cases}$$

$(-\infty; -2{,}8]\cup(-2{,}5; -2)\cup(2; +\infty)$ (см. рис. 213).

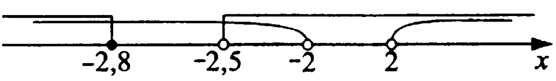


Рис. 213

Ответ: $(-\infty; -2{,}8]\cup(-2{,}5; -2)\cup(2; +\infty)$.

540. Данное уравнение может иметь два различных корня лишь тогда, когда оно квадратное (то есть $a \neq 0$) и его дискриминант положителен.

$D = (2a+3)^2 - 4a(a+2) = 4a + 9 > 0 \Rightarrow$ при $a > -\frac{9}{4}$, $a \neq 0$ данное уравнение имеет два различных корня — x_1, x_2. По условию, нужно выбрать те значения параметра a, при которых $x_1^2 + x_2^2 > 3$. Выразим $x_1^2 + x_2^2$ через коэффициенты данного уравнения, воспользовавшись теоремой Виета и тождеством $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Имеем $x_1^2 + x_2^2 = \frac{(2a+3)^2}{a^2} - \frac{2(a+2)}{a} = \frac{2a^2+8a+9}{a^2}$. Решим неравенство $\frac{2a^2+8a+9}{a^2} > 3$. С учётом условия $a \neq 0$ оно равносильно неравенству $2a^2 + 8a + 9 > 3a^2 \Leftrightarrow a^2 - 8a - 9 < 0$; $a \in (-1; 9)$. Остаётся вспомнить, что условие $a > -\frac{9}{4}$ при $a \in (-1; 9)$ выполнено. Учитывая, что $a \neq 0$, получаем $a \in (-1; 0) \cup (0; 9)$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 9)$.

541. Среднее арифметическое девяти чисел равно 17, значит, сумма этих девяти чисел равна $17 \cdot 9 = 153$.

Среднее арифметическое других одиннадцати чисел равно 7, значит, сумма этих одиннадцати чисел равна $7 \cdot 11 = 77$. Тогда сумма всех двадцати чисел равна $153 + 77 = 230$, а их среднее арифметическое равно $230 : 20 = 11{,}5$.

Ответ: 11,5.

542. Наименьшее трёхзначное число, кратное 15, — это 105, наибольшее — 990. Задача сводится к нахождению суммы членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 105$, $a_n = 990$, $d = 15$. Найдём число членов этой прогрессии, применив формулу общего члена.
$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$, $105 + 15 \cdot (n-1) = 990$, $7 + n - 1 = 66$, $n = 60$.
Сумму членов найдём по формуле
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $S_{60} = \frac{105 + 990}{2} \cdot 60 = 32\,850$.

Ответ: 32 850.

543. Наименьшее трёхзначное число, кратное 14, — это 112, наибольшее — 994. Задача сводится к нахождению суммы членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = 112$, $a_n = 994$, $d = 14$.

Найдём число элементов этой прогрессии, применив формулу общего члена. $a_n = a_1 + d(n-1)$; $112 + 14(n-1) = 994$; $8 + n - 1 = 71$; $n = 64$.

Сумму членов найдём по формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$S_{64} = \frac{112 + 994}{2} \cdot 64 = 35\,392$.

Ответ: 35 392.

544. Пусть t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 — заданные числа.
По условию $\sqrt{t_1 \cdot t_2} = 243$, тогда $t_1 \cdot t_2 = 243^2 = 3^{10}$, а $\sqrt[3]{t_3 \cdot t_4 \cdot t_5} = 32$, тогда $t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 = 32^3 = 2^{15}$. Имеем $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 = 3^{10} \cdot 2^{15}$, среднее геометрическое всех пяти чисел равно:
$\sqrt[5]{t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5} = \sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}} = 3^2 \cdot 2^3 = 9 \cdot 8 = 72$.

Ответ: 72.

545. Графиком функции $y = x^2 - (2a - 1)x + 3a$ является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдём координаты вершины параболы:

$x_0 = \frac{2a - 1}{2} = a - 0{,}5$,

$y_0 = (a-0{,}5)^2-(2a-1)(a-0{,}5)+3a = a^2-a+0{,}25-2a^2+2a-0{,}5+3a =$
$= -a^2 + 4a - 0{,}25$.
$(a - 0{,}5; -a^2 + 4a - 0{,}25)$ — искомые координаты. $E(y) = [y_0; +\infty)$.
По условию задачи необходимо, чтобы $E(y) = [1{,}5; +\infty)$, значит,
$y_0 = 1{,}5$.
$-a^2 + 4a - 0{,}25 = 1{,}5$; $a^2 - 4a + 1{,}75 = 0$; $a_1 = 0{,}5$, $a_2 = 3{,}5$.

Ответ: 0,5; 3,5.

546. По условию задачи окружность $x^2 + y^2 = 10$ не имеет общих точек с прямой $mx + y = 10$, значит, система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ mx + y = 10 \end{cases}$ должна быть несовместной.
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y = 10 - mx; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + (10 - mx)^2 = 10, \\ y = 10 - mx. \end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение этой системы:
$x^2 + 100 - 20mx + m^2x^2 - 10 = 0$, $(1 + m^2)x^2 - 20mx + 90 = 0$.
$1 + m^2 \neq 0$, поэтому уравнение квадратное. Оно не должно иметь действительных корней, следовательно, $D < 0$.
$(20m)^2 - 4 \cdot 90 \cdot (1 + m^2) < 0$, $400m^2 - 360m^2 < 360$, $40m^2 < 360$, $m^2 < 9$, $|m| < 3$.

Ответ: $(-3; 3)$.

547. Найдём координаты вершины параболы $y = 2x^2 + ax + 1$.

$x_0 = -\frac{a}{2 \cdot 2} = -\frac{a}{4}$;

$y_0 = 2 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{4}\right) + 1 = \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} + 1 = \frac{a^2 - 2a^2 + 8}{8} = \frac{8 - a^2}{8}$;

$\left(-\frac{a}{4}; \frac{8-a^2}{8}\right)$ — координаты вершины.

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой x_0, лежащей на прямой $y = x$, $y_1 = -\frac{a}{4}$.

Поскольку вершина параболы лежит выше прямой, ордината y должна быть больше ординаты y_1. Следовательно, все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству

$\frac{8-a^2}{8} > -\frac{a}{4}$; $\frac{8-a^2}{8} > -\frac{2a}{8}$; $8 - a^2 > -2a$; $a^2 - 2a - 8 < 0$;

$(a+2)(a-4) < 0$; $-2 < a < 4$.

Целые искомые значения параметра a: $-1; 0; 1; 2; 3$.

Ответ: -1; 0; 1; 2; 3.

548. Найдём координаты вершины параболы $y = x^2 + ax - 2$.

$x_0 = -\frac{a}{2}$; $y_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) - 2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2 = -\frac{a^2}{4} - 2$.

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой x_0, лежащей на прямой $y = 2x$: $y_1 = 2\left(-\frac{a}{2}\right) = -a$.

Поскольку вершина параболы лежит ниже прямой, ордината y_1 должна быть больше ординаты y_0. Следовательно, все искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству

$-\frac{a^2}{4} - 2 < -a$; $a^2 - 4a + 8 > 0$; $(a-2)^2 + 4 > 0$. Это неравенство верно при любом действительном значении a. В задаче необходимо найти все целые значения a, следовательно, $a \in Z$.

Ответ: $a \in Z$.

549. $y = x^2 - x + 1$, $x + my - 1 = 0$.

По условию задачи парабола $y = x^2 - x + 1$ имеет с прямой $x + my - 1 = 0$ единственную общую точку, значит, система уравнений

$\begin{cases} y = x^2 - x + 1, \ (1) \\ x + my - 1 = 0 \ (2) \end{cases}$ должна иметь единственное решение.

Из второго уравнения системы выразим x через y и подставим в первое уравнение:

$x = 1 - my$, $y = (1-my)^2 - (1-my) + 1$, $1 - 2my + m^2y^2 - 1 + my - y + 1 = 0$,

$m^2y^2 - (m+1) \cdot y + 1 = 0$.

1) $m = 0$, $-y + 1 = 0$, $y = 1$, уравнение имеет единственный корень, значит, система имеет единственное решение, что удовлетворяет условию задачи.

2) $m \neq 0$, уравнение квадратное, оно должно иметь единственный корень, следовательно, $D = 0$.
$(m+1)^2 - 4m^2 = 0, m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = 0, 3m^2 - 2m - 1 = 0, m_1 = 1,$
$m_2 = -\frac{1}{3}$.

При $m_1 = 1$ и $m_2 = -\frac{1}{3}$ система имеет единственное решение.

Ответ: 0, 1, $-\frac{1}{3}$.

550. 1. Отметим, что если $m = 0$, то прямая $-x - 1 = 0$ имеет с параболой единственную общую точку.

2. $m \neq 0$. Система
$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ my - x - 1 = 0; \end{cases}$$
должна иметь единственное решение.
$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ x = my - 1. \end{cases}$$

Подставив значение x из второго уравнения системы в первое уравнение, получим $y = (my-1)^2 + (my-1) + 1$; $y = m^2y^2 - my + 1$; $m^2y^2 - (m+1)y + 1 = 0$.

Уравнение должно иметь один корень, следовательно, $D = 0$.
$(m+1)^2 - 4m^2 = 0$; $m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = 0$; $3m^2 - 2m - 1 = 0$;
$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3}$; $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ: 0; 1; $-\frac{1}{3}$.

551. Найдём абсциссу вершины параболы $y = x^2 - 2ax + 43$:
$x_0 = \frac{2a}{2} = a$.

1) Пусть $x_0 < -2$, тогда $a < -2$. Так как ветви параболы направлены вверх, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ функция возрастает (см. рис. 214).

$y_{наим.} = y(-2) = 4 - 2a \cdot (-2) + 43 = 7$; $4a = -40$; $a = -10$. $a = -10$ удовлетворяет условию $a < -2$.

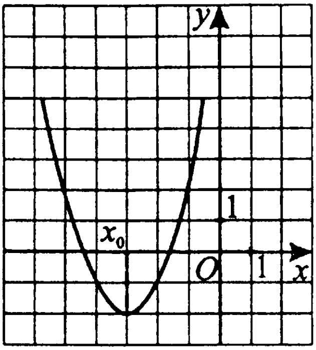


Рис. 214

2) Пусть $x_0 \geqslant -2$, тогда $a \geqslant -2$. Наименьшее значение функция принимает в вершине параболы (см. рис. 215).

$y_{\text{наим.}} = y(x_0) = y(a) = a^2 - 2a^2 + 43 = 7$; $a^2 = 36$; $a_1 = 6$; $a_2 = -6$ — не удовлетворяет условию $a \geqslant -2$.

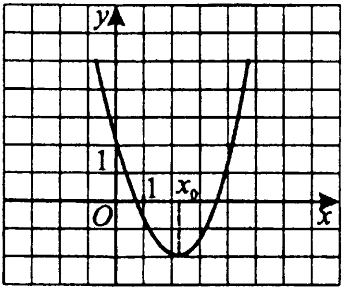


Рис. 215

Ответ: -10; 6.

552. Найдём абсциссу вершины параболы $y = -x^2 + 2ax - 71$ на $[-3; +\infty)$:

$x_0 = \dfrac{-2a}{-2} = a.$

1) Пусть $x_0 < -3$, тогда $a < -3$. Так как ветви параболы направлены вниз, то на промежутке $[x_0; +\infty)$ функция убывает (см. рис. 216).

$y_{\text{наиб.}} = y(-3) = -9 + 2a \cdot (-3) - 71 = 10$; $-6a = 90$; $a = -15$ — удовлетворяет условию $a < -3$.

2) Пусть $x_0 \geqslant -3$, тогда $a \geqslant -3$. Наибольшее значение функция принимает в вершине параболы (см. рис. 217).

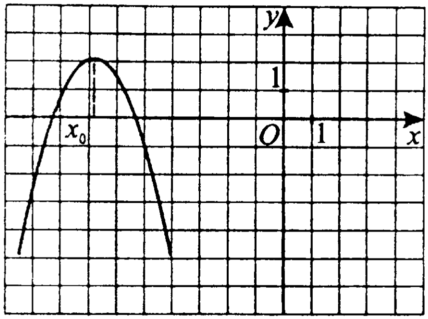


Рис. 216

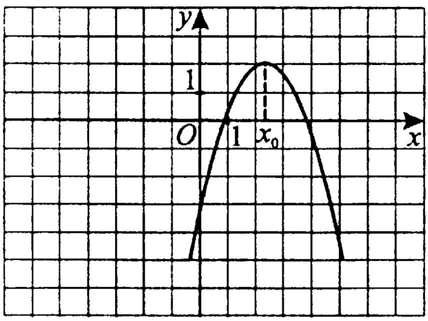


Рис. 217

$y_{\text{наиб.}} = y(x_0) = y(a) = -a^2 + 2a^2 - 71 = 10$; $a^2 = 81$; $a_1 = 9$, $a_2 = -9$ — не удовлетворяет условию $a \geqslant -3$.

Ответ: -15; 9.

553. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$.
$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - a^2 + 1}$; $x_1 = a - 1$, $x_2 = a + 1$.

По условию задачи число 3 заключено между корнями уравнения, то есть $a - 1 < 3 < a + 1$; $\begin{cases} a - 1 < 3, \\ a + 1 > 3; \end{cases}$ $\begin{cases} a < 4, \\ a > 2; \end{cases}$ $2 < a < 4$.

Ответ: $2 < a < 4$.

554. $x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2 = 0$.

1) Найдём допустимые значения параметра a. Уравнение имеет действительные корни, если $D \geqslant 0$.

$D = (6a)^2 - 4(9a^2 - 2a + 2) = 36a^2 - 36a^2 + 8a - 8 = 8a - 8$; $8a - 8 \geqslant 0$; $a \geqslant 1$. Абсцисса вершины параболы $x_0 = \dfrac{6a}{2} = 3a \geqslant 3$.

2) Рассмотрим функцию $y = x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, значит, на промежутках $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, где $x_2 \geqslant x_1$, функция принимает положительные значения. Из условия следует: $3 \in (-\infty; x_1)$ (см. рис. 218), значит, $y(3) > 0$.

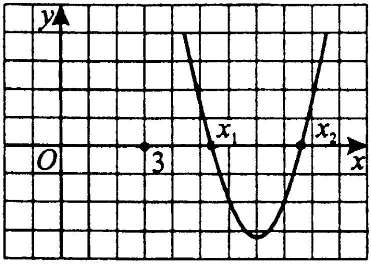


Рис. 218

3) Найдём значения параметра a, решив систему неравенств

$$\begin{cases} 3^2 - 6a \cdot 3 + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9 - 18a + 9a^2 - 2a + 2 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2 - 20a + 11 > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9(a-1)\left(a - \dfrac{11}{9}\right) > 0, \\ a \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < 1, \\ a > \dfrac{11}{9}, \end{array}\right. \\ a \geqslant 1; \end{cases} \quad a > \frac{11}{9} \text{ (см. рис. 219).}$$

Так как $x_0 \geqslant 3$, то случай, при котором оба корня меньше 3, невозможен.

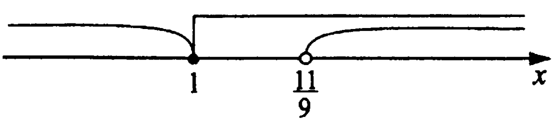


Рис. 219

Ответ: $a > \dfrac{11}{9}$.

555. Пусть (x_0, y_0) — координаты вершины данной параболы, тогда $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, где $b = -7$, $a = m$, то есть $x_0 = \dfrac{7}{2m}$ $(m \neq 0)$.

Так как вершина параболы должна лежать во II четверти, то $x_0 < 0$; $\frac{7}{2m} < 0$; $m < 0$. Ветви параболы направлены вниз. Так как вершина находится во II четверти, то квадратный трёхчлен имеет 2 различных действительных корня.

$D > 0$; $49 - 16m^2 > 0$; $-\frac{7}{4} < m < \frac{7}{4}$; учитывая, что $m < 0$, получаем

$-\frac{7}{4} < m < 0$.

Ответ: $(-1{,}75;\ 0)$.

556. ОДЗ: $x \in [2; 7]$.

Левая часть уравнения $\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} = c$ есть сумма двух неотрицательных чисел, следовательно, $c \geqslant 0$.

Тогда $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}\right)^2 = c^2$; $x-2+7-x+2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2$; $2\sqrt{(x-2)(7-x)} = c^2 - 5$. Отсюда $c^2 \geqslant 5$. Так как $c \geqslant 0$, то $c \geqslant \sqrt{5}$. $4\left(7x-x^2+2x-14\right) = c^4-10c^2+25$; $4x^2-36x+c^4-10c^2+81 = 0$. Так как заданное уравнение должно иметь хотя бы один корень, то и полученное квадратное уравнение относительно x должно иметь хотя бы один корень. Следовательно, $D = 36^2 - 4\cdot 4\left(c^4 - 10c^2 + 81\right) \geqslant 0$; $c^4 - 10c^2 \leqslant 0$; $c^2\left(c^2 - 10\right) \leqslant 0$. Учитывая, что $c \geqslant \sqrt{5}$, получаем $c^2 - 10 \leqslant 0$, $c \leqslant \sqrt{10}$.

Таким образом, $\sqrt{5} \leqslant c \leqslant \sqrt{10}$. Отрезок $\left[\sqrt{5}; \sqrt{10}\right]$ содержит единственное целое число 3.

Подставляя $c = 3$ в заданное уравнение, получаем два корня: $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$. Следовательно, $c = 3$ — искомое значение.

Ответ: 3.

557. $2\sqrt{x+3} + \sqrt{11-4x} = c$. (1)

Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных чисел, значит, $c \geqslant 0$. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ 11-4x \geqslant 0, \\ c \geqslant 0, \\ \left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{11-4x}\right)^2 = c^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant \dfrac{11}{4}, \\ c \geqslant 0, \\ 4x+12+4\sqrt{(x+3)(11-4x)}+11-4x = c^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \frac{11}{4}, \\ c \geqslant 0, \\ 4\sqrt{11x - 4x^2 + 33 - 12x} = c^2 - 23; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \frac{11}{4}, \\ c \geqslant 0, \\ c^2 - 23 \geqslant 0, \\ 16(33 - x - 4x^2) = (c^2 - 23)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \frac{11}{4}, \\ c \geqslant 0, \\ |c| \geqslant \sqrt{23}, \\ 64x^2 + 16x - 528 + (c^2 - 23)^2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant \frac{11}{4}, \\ c \geqslant \sqrt{23}, \\ 64x^2 + 16x - 528 + (c^2 - 23)^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $64x^2 + 16x - \left(528 - (c^2 - 23)^2\right) = 0.$ (2)

По условию уравнение (1) должно иметь хотя бы один корень, значит, дискриминант уравнения (2) должен быть неотрицательным числом.
$D \geqslant 0$; $16^2 + 4 \cdot 64 \cdot \left(528 - (c^2 - 23)^2\right) \geqslant 0$; $529 - (c^2 - 23)^2 \geqslant 0$; $(c^2 - 23)^2 \leqslant 529$; $|c^2 - 23| \leqslant 23$; $-23 \leqslant c^2 - 23 \leqslant 23$; $0 \leqslant c^2 \leqslant 46$; $|c| \leqslant \sqrt{46}$.

Учитывая, что $c \geqslant \sqrt{23}$, имеем

$$\begin{cases} c \geqslant \sqrt{23}, \\ -\sqrt{46} \leqslant c \leqslant \sqrt{46}; \end{cases} \quad \sqrt{23} \leqslant c \leqslant \sqrt{46}.$$

Отрезок $[\sqrt{23}; \sqrt{46}]$ содержит два целых числа: 5 и 6.
Проверка показала, что при $c = 5$ уравнение (1) имеет один корень, при $c = 6$ два корня (выполните самостоятельно).

Ответ: 5; 6.

558. Найдём координаты точки пересечения прямых $3x + ay + 1 = 0$ и $2x - 3y - 4 = 0$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + ay = -1, \\ 2x - 3y = 4. \end{cases}$$

а) Умножим первое уравнение системы на 2, а второе — на (-3), а затем сложим полученные уравнения: $(2a+9)y = -14$; $y = -\frac{14}{2a+9}$; $a \neq -4{,}5$.

б) Умножим первое уравнение системы на 3, второе — на a, получим $9x + 3ay = -3$ и $2ax - 3ay = 4a$, сложим полученные уравнения

$(9+2a)x = 4a - 3$, $x = \frac{4a-3}{9+2a}$, $a \neq -4{,}5$.

$\left(\frac{4a-3}{9+2a}; -\frac{14}{2a+9}\right)$ — искомые координаты. При $a = -4{,}5$ система несовместна (проверьте самостоятельно).

По условию задачи точка находится в третьей координатной четверти, значит, и абсцисса, и ордината — отрицательные числа. Найдём значения параметра a ($a \neq -4{,}5$), решив систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{4a-3}{9+2a} < 0, \\ -\frac{14}{2a+9} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4a-3}{2a+9} < 0, \\ 2a+9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a-3 < 0, \\ 2a+9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < \frac{3}{4}, \\ a > -\frac{9}{2}; \end{cases}$$

$-4{,}5 < a < 0{,}75$.

Ответ: $(-4{,}5; 0{,}75)$.

559. Найдём координаты точки пересечения прямых $x + 5y - 3 = 0$ и $ax - 2y - 1 = 0$, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x + 5y = 3, \\ ax - 2y = 1. \end{cases}$$

а) Умножим первое уравнение системы на $-a$ и сложим со вторым уравнением; получим $(-5a-2)y = -3a+1$; $y = \frac{3a-1}{5a+2}$; $a \neq -0{,}4$.

б) Умножим первое уравнение системы на 2, а второе — на 5 и сложим полученные уравнения; получим $(2+5a)x = 11$; $x = \frac{11}{5a+2}$; $a \neq -0{,}4$.

$\left(\frac{11}{5a+2}; \frac{3a-1}{5a+2}\right)$ — координаты точки пересечения заданных прямых.

При $a = -0{,}4$ система несовместна (проверьте самостоятельно).

По условию задачи точка находится в четвёртой координатной четверти, значит, её абсцисса положительная, а ордината отрицательная.

Найдём значения параметра a ($a \neq -0{,}4$), решив систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{11}{5a+2} > 0, \\ \dfrac{3a-1}{5a+2} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5a+2 > 0, \\ a - \dfrac{1}{3} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -0{,}4, \\ a < \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

$-0{,}4 < a < \dfrac{1}{3}$ — решение системы неравенств.

Ответ: $\left(-0{,}4; \dfrac{1}{3}\right)$.

560. По определению корнем уравнения является число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство. Так как число $2+\sqrt{5}$ является корнем уравнения $x^3 - 5x^2 + 3x + b = 0$, то $(2+\sqrt{5})^3 - 5(2+\sqrt{5})^2 + 3(2+\sqrt{5}) + b = 0$ — верное числовое равенство, из которого находим, что

$b = -(2+\sqrt{5})^3 + 5(2+\sqrt{5})^2 - 3(2+\sqrt{5}) =$

$= -8 - 12\sqrt{5} - 30 - 5\sqrt{5} + 20 + 20\sqrt{5} + 25 - 6 - 3\sqrt{5} = 1.$

Итак, $b = 1$.

Ответ: $b = 1$.

561. Точка $M(3; 1)$ лежит вне заданной окружности, следовательно, через неё можно провести две касательные к этой окружности. Подставляя координаты этой точки в общий вид уравнения прямой $y = kx + b$, получим $1 = 3k + b$; $b = 1 - 3k$. Следовательно, уравнения прямых, проходящих через точку M, имеют вид $y = kx + 1 - 3k$.

Каждая из прямых должна иметь с данной окружностью одну общую точку. Следовательно, система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y = kx + 1 - 3k \end{cases}$ должна иметь относительно x и y единственное решение. Подставляя значение y из второго уравнения системы в первое, получим:

$x^2 + (kx + 1 - 3k)^2 = 5$; $(1+k^2)x^2 + 2(k - 3k^2)x + 9k^2 - 6k - 4 = 0$.

Это уравнение имеет один корень, если

$D = 4(k - 3k^2)^2 - 4(1+k^2)(9k^2 - 6k - 4) = 0$; $2k^2 - 3k - 2 = 0$; $k_1 = -0{,}5$, $k_2 = 2$. Тогда $b_1 = 1 - 3k_1 = 2{,}5$, $b_2 = 1 - 3k_2 = -5$.

Таким образом, искомые уравнения касательных имеют вид

$y = -0{,}5x + 2{,}5$ и $y = 2x - 5$.

Ответ: $y = -0{,}5x + 2{,}5$; $y = 2x - 5$.

562. 1) Пусть $a = 0$, тогда $y = 2x + 2$; графиком этой функции является прямая, пересекающая ось Ox в одной точке, что удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть $a \neq 0$, тогда графиком функции $y = ax^2 + 2x - a + 2$ является парабола.

Для того чтобы она пересекала ось Ox только в одной точке, необходимо равенство нулю дискриминанта уравнения $ax^2 + 2x - a + 2 = 0$.
$D = 4 - 4a(2-a) = 0$; $4a^2 - 8a + 4 = 0$; $a^2 - 2a + 1 = 0$; $(a-1)^2 = 0$; $a = 1$.

Ответ: 0; 1.

563. Найдём координаты точки пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 2a - 3x$, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = 2a - 3x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = 2a - 3x, \\ y = 2x + 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a-3}{5}, \\[2mm] y = \dfrac{4a+9}{5}. \end{cases}$$

$\left(\dfrac{2a-3}{5}; \dfrac{4a+9}{5}\right)$ — искомые координаты.

Найдём ординату y_1 точки с абсциссой $x = \dfrac{2a-3}{5}$, лежащей на прямой $y = x$: $y_1 = \dfrac{2a-3}{5}$.

Поскольку точка пересечения прямых $y = 2x + 3$ и $y = 2a - 3x$ лежит выше прямой $y = x$, то ордината $y_1 = \dfrac{2a-3}{5} < \dfrac{4a+9}{5}$.

Найдём значения параметра a, решив неравенство:

$\dfrac{4a+9}{5} > \dfrac{2a-3}{5}$; $4a + 9 > 2a - 3$; $2a > -12$; $a > -6$.

Ответ: $a \in (-6; +\infty)$.

564. Запишем уравнение прямой $y = kx + b$.
Точки $A(1;2)$, $B(3;a+1)$, $C(a;4)$ лежат на прямой, значит, $y(1) = 2$, $y(3) = a + 1$, $y(a) = 4$ и имеет место система уравнений

$$\begin{cases} k + b = 2, \\ 3k + b = a + 1, \\ ak + b = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ 3k + 2 - k = a + 1, \\ ak + 2 - k = 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ k = \dfrac{a-1}{2}, \\ \dfrac{(a-1)^2}{2} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ k = \dfrac{a-1}{2}, \\ |a-1| = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ k = \dfrac{a-1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a - 1 = 2, \\ a - 1 = -2; \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - k, \\ k = \dfrac{a-1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a = 3, \\ a = -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

При $a = -1$, $k = -1$, $b = 3$, $y = -x + 3$,
при $a = 3$, $k = 1$, $b = 1$, $y = x + 1$.

Ответ: -1, 3.

565. Найдём абсциссу x_0 точки пересечения прямых $y = 5x - 3$ и $y = a + 1 - 2x$, приравняв ординаты y. Получаем $5x_0 - 3 = a + 1 - 2x_0$, откуда $x_0 = \dfrac{a+4}{7}$. Тогда ордината точки пересечения прямых $y_0 = \dfrac{5a-1}{7}$. Далее находим ординату y_1 точки с абсциссой x_0, лежащей на прямой $y = -x$: $y_1 = -\dfrac{a+4}{7}$. Поскольку точка пересечения прямых $y = 5x - 3$ и $y = a + 1 - 2x$ лежит ниже прямой $y = -x$, ордината y_1 должна быть больше ординаты y_0. Следовательно, условие задачи выполняется при всех значениях параметра, удовлетворяющих неравенству $-\dfrac{a+4}{7} > \dfrac{5a-1}{7}$; $a < -0{,}5$.

Ответ: $a \in (-\infty; -0{,}5)$.

566. Для ответа на поставленный в условии вопрос достаточно определить, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ и график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$. Графиком функции $y = x^2 - 6x + 4$ является парабола с вершиной, абсцисса которой равна $x_0 = \dfrac{-(-6)}{2} = 3$, а ордината равна $y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5$. Отражая часть графика $y = x^2 - 6x + 4$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$, эскиз которого изображён на рисунке 220.

Таким образом, при $a = 0$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 6x + 4|$ в двух точках, при $0 < a < 5$ — в четырёх точках, при $a = 5$ — в трёх точках и при $a > 5$ — в двух точках.

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 5$; 3 при $a = 5$; 2 при $a > 5$.

567. Определим, сколько общих точек имеют прямая $y = a$ и график функции $y = |x^2 - 4x|$. Графиком функции $y = x^2 - 4x$ является парабола,

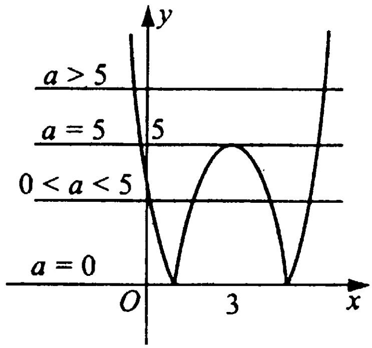


Рис. 220

абсцисса вершины которой $x_0 = \dfrac{-(-4)}{2} = 2$, ордината $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$. Отражая часть графика $y = x^2 - 4x$, расположенную ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, получаем график функции $y = |x^2 - 4x|$, эскиз которого изображён на рисунке 221. Таким образом, при $a = 0$ прямая $y = a$ пересекает график $y = |x^2 - 4x|$ в двух точках, при $0 < a < 4$ — в четырёх точках, при $a = 4$ — в трёх точках и при $a > 4$ — в двух точках.

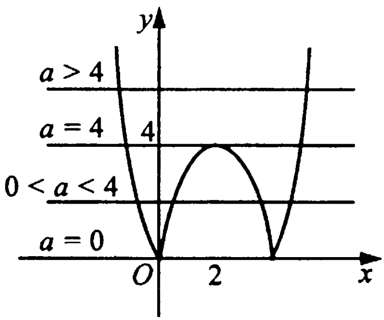


Рис. 221

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $0 < a < 4$; 3 при $a = 4$; 2 при $a > 4$.

568. Выразим y из первого уравнения системы $y = nx - 5$ и подставим во второе: $2x + 3n(nx - 5) = 7$. Выразим теперь x через n:

$2x + 3n(nx - 5) = 7 \Leftrightarrow (3n^2 + 2)x - 15n = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{15n + 7}{3n^2 + 2}$. Тогда $y = nx - 5 = \dfrac{n(15n + 7)}{3n^2 + 2} - 5 = \dfrac{7n - 10}{3n^2 + 2}$. Итак, система имеет решение, зависящее от параметра n: $x = \dfrac{15n+7}{3n^2+2}$, $y = \dfrac{7n-10}{3n^2+2}$. Так как $3n^2+2>0$, то, для того чтобы выполнялось условие $x > 0$, $y < 0$, необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло системе неравенств $\begin{cases} 15n+7>0, \\ 7n-10<0. \end{cases}$

Решением системы является интервал $-\dfrac{7}{15} < n < \dfrac{10}{7}$. Целых значений n в этом интервале только два: $n = 0$; 1.

Ответ: 0; 1.

569. Выразим y из первого уравнения системы $y = 4 - 2nx$ и подставим во второе: $3x - 2n(4-2nx) = 5$. Выразим из этого уравнения x:

$3x - 2n(4-2nx) = 5 \Leftrightarrow (4n^2+3)x - 8n = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{8n+5}{4n^2+3}$. Тогда

$y = 4 - 2nx = 4 - \dfrac{2n(8n+5)}{4n^2+3} = \dfrac{12-10n}{4n^2+3}$. Итак, система имеет решение, зависящее от параметра n: $x = \dfrac{8n+5}{4n^2+3}$, $y = \dfrac{12-10n}{4n^2+3}$. Так как $4n^2+3>0$, то, для того чтобы $x>0$, $y>0$, необходимо и достаточно, чтобы n удовлетворяло системе неравенств $\begin{cases} 8n+5>0, \\ 12-10n>0. \end{cases}$ Решением системы является интервал $-\dfrac{5}{8} < n < \dfrac{6}{5}$. Целых значений n в этом интервале только два: $n = 0$; 1.

Ответ: 0; 1.

570. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался ниже оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения следующих условий для соответствующего квадратного уравнения: $D < 0$, $a < 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 6x + a = 0$ имеем $D = 36 - 4a^2$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a < 0, \\ 36 - 4a^2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ 9 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $a \in (-\infty; -3)$ (см. рис. 222).

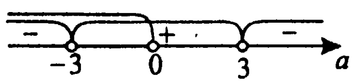


Рис. 222

Ответ: $(-\infty; -3)$.

571. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался выше оси абсцисс, необходимо и достаточно для соответствующего квадратного уравнения выполнения условий: $D < 0$, $a > 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 2ax + 3 = 0$ имеем $D = 4a^2 - 12a$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ 4a^2 - 12a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4a(a-3) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 3)$.

572. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался выше оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения для соответствующего квадратного уравнения условий: $D < 0$, $a > 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 4x + a = 0$ имеем $D = 16 - 4a^2$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ 16 - 4a^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 4(2-a)(2+a) < 0. \end{cases}$$

Решая второе неравенство последней системы методом интервалов и учитывая, что $a > 0$, получим $a \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

573. Для того чтобы график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ располагался ниже оси абсцисс, необходимо и достаточно выполнения для соответствующего квадратного уравнения условий: $D < 0$, $a < 0$. Для квадратного уравнения $ax^2 - 8x + a = 0$ имеем $D = 64 - 4a^2$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a < 0, \\ 64 - 4a^2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 16 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Откуда находим: $a \in (-\infty; -4)$ (см. рис. 223).

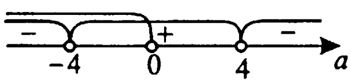


Рис. 223

Ответ: $(-\infty; -4)$.

574. Так как первая парабола пересекает ось Ox в точке $x = 2$, то $x = 2$ является корнем уравнения $y_1(x) = 0$. Пусть $x = a$ — второй корень уравнения $y_1(x) = 0$, тогда $y_1 = (x - a)(x - 2) = x^2 - x(a + 2) + 2a$; значит, $b = -(a + 2)$, $c = 2a$.

Поскольку $A(1;2)$ — точка пересечения данных парабол, то справедлива система
$\begin{cases} y_1(1) = 2, \\ y_2(1) = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 - (a+2) + 2a = 2, \\ -1 + k + l = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 3, \\ k + l = 3. \end{cases}$
Проекция вершины второй параболы на ось Ox — это абсцисса вершины, то есть точка $x = \frac{k}{2}$. Аналогично проекция вершины первой параболы — точка $x = \frac{a+2}{2}$. Из условия следует, что $\frac{k}{2} = \frac{a+2}{2} + 1$. Так как $a = 3$, то $\frac{k}{2} = \frac{5}{2} + 1 = 3{,}5$; $k = 7$. Подставив $k = 7$ во второе уравнение последней системы, получим $l = 3 - k = -4$. Таким образом, $k = 7$, $l = -4$.

Ответ: $k = 7$, $l = -4$.

575. Так как вторая парабола пересекает ось Ox в точке $x = 3$, то $x = 3$ является корнем уравнения $y_2(x) = 0$. Пусть $x = a$ — второй корень уравнения $y_2(x) = 0$, тогда $y_2 = -(x-a)(x-3) = -x^2 + x(a+3) - 3a$; значит, $d = a+3$; $f = -3a$. Поскольку $A(2;3)$ — точка пересечения данных парабол, то справедлива система
$\begin{cases} y_1(2) = 3, \\ y_2(2) = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 4 + 2b + c = 3, \\ -4 + 2(a+3) - 3a = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2b + c = -1, \quad (1) \\ a = -1. \end{cases}$
Проекция вершины первой параболы на ось Ox — это абсцисса вершины, то есть точка $x = -\frac{b}{2}$. Аналогично проекция вершины второй параболы на ось Ox — точка $x = \frac{a+3}{2}$. Из условия следует, что $\frac{a+3}{2} = -\frac{b}{2} + 2$. Так как $a = -1$, то $\frac{b}{2} = 2 - \frac{a+3}{2} = 1$; $b = 2$. Подставив $b = 2$ в уравнение (1), получим $c = -1 - 4 = -5$. Таким образом, $b = 2$, $c = -5$.

Ответ: $b = 2$, $c = -5$.

576. Если данная парабола симметрична относительно прямой $x = -2$, то на этой прямой лежит её вершина, то есть $x_0 = -\frac{b}{2} = -2$; $b = 4$.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x + 3$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + bx + c = 2x + 3$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b-2)x + c - 3 = 0$ равен нулю: $D = (b-2)^2 - 4(c-3) = 0$; $(b-2)^2 = 4(c-3)$. Подставив $b = 4$, получим: $4 = 4(c-3)$; $c = 4$.

Ответ: $b = 4$; $c = 4$.

577. Если данная парабола симметрична относительно прямой $x = 3$, то на этой прямой лежит её вершина, то есть $x_0 = -\frac{b}{2} = 3$; $b = -6$.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 2x - 5$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + bx + c = 2x - 5$ имеет ровно одно решение, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b-2)x + c + 5 = 0$ равен нулю: $D = (b-2)^2 - 4(c+5) = 0$; $(b-2)^2 = 4(c+5)$. Подставив $b = -6$, получим $64 = 4(c+5)$; $c + 5 = 16$; $c = 11$.

Ответ: $b = -6$; $c = 11$.

578. Уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. $D = 4b^2 - 4(b+6) \geqslant 0$; $4(b-3)(b+2) \geqslant 0$; $b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Если корни x_1, x_2 отрицательны, то, согласно теореме Виета, имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b < 0, \\ x_1 x_2 = b + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow -6 < b < 0.$$

Учитывая, что $b \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, получаем, что искомыми значениями параметра b являются $b \in (-6; -2]$.

Ответ: $(-6; -2]$.

579. Уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. $D = 4b^2 - 4(b+6) \geqslant 0$; $4(b-3)(b+2) \geqslant 0$; $b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Если корни x_1, x_2 положительны, то, согласно теореме Виета, имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b > 0, \\ x_1 x_2 = b + 6 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow b > 0.$$

Учитывая, что $b \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, получаем, что искомыми значениями параметра b являются $b \in [3, +\infty)$.

Ответ: $[3, +\infty)$.

580. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 224), совпадающая при $x < -2$ с графиком гиперболы $y = \frac{4}{x}$, при $-2 \leqslant x \leqslant 2$ с графиком прямой $y = \frac{x}{2} - 1$ и при $x > 2$ с графиком параболы $y = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Вершина параболы находится в точке $(3; -1)$, ветви направлены вверх. По графику определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ две общие точки при $-2 < m < -1$ и при $m = 0$.

Ответ: $m \in (-2; -1) \cup \{0\}$.

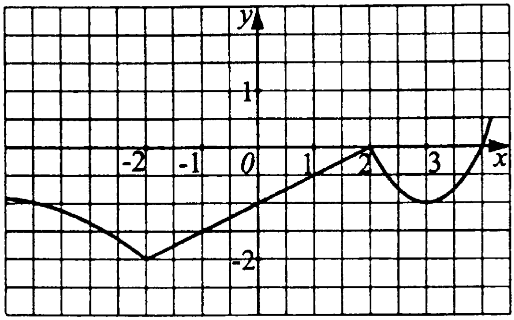


Рис. 224

581. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 225), совпадающая при $x < -1$ с графиком параболы $y = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x+2)^2$, вершина которой находится в точке $(-2; 0)$, а ветви направлены вверх; при $-1 \leqslant x < 0$ с графиком прямой $y = -x+1$; при $0 \leqslant x \leqslant 3$ с графиком прямой $y = x + 1$; при $x > 3$ с графиком гиперболы $y = \dfrac{12}{x}$. По графику определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ три общие точки при $0 < m < 1$ и при $2 < m < 4$.

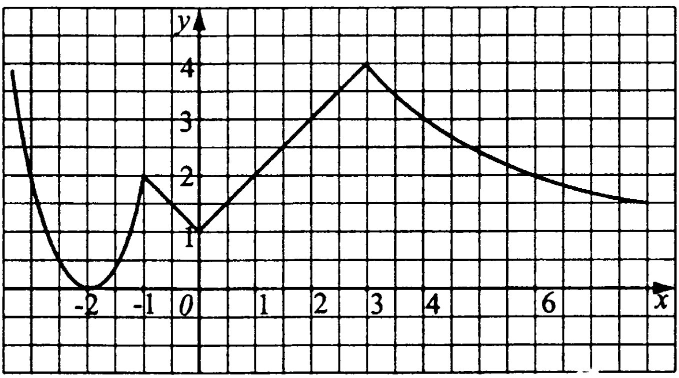


Рис. 225

Ответ: $m \in (0; 1) \cup (2; 4)$.

582. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 226), совпадающая при $x \leqslant -3$ с графиком гиперболы $y = \dfrac{6}{x}$,

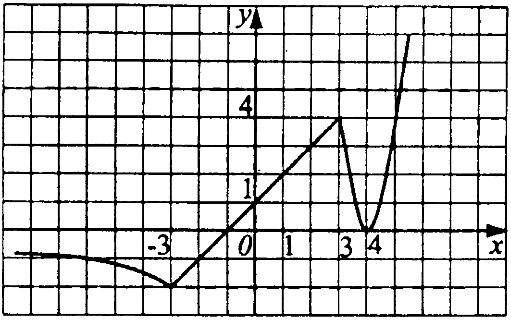


Рис. 226

при $-3 < x \leqslant 3$ с графиком прямой $y = x + 1$ и при $x > 3$ с графиком параболы $y = 4x^2 - 32x + 64 = (2x - 8)^2$.

Вершина параболы находится в точке $(4; 0)$, ветви направлены вверх. По рисунку определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ только одну общую точку при $m = -2$ и при $m > 4$.

Ответ: $\{-2\} \cup (4; +\infty)$.

583. Графиком функции $y = f(x)$ является непрерывная кривая (см. рис. 227), совпадающая при $x \leqslant -1$ с графиком гиперболы $y = -\dfrac{1}{x}$, при $-1 < x \leqslant 1$ с графиком прямой $y = -x$ и при $x > 1$ с графиком параболы $y = -x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2$. Вершина параболы находится в точке $(2; 0)$, ветви направлены вниз. По рисунку определяем, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции $y = f(x)$ три общие точки при $-1 < m < 0$.

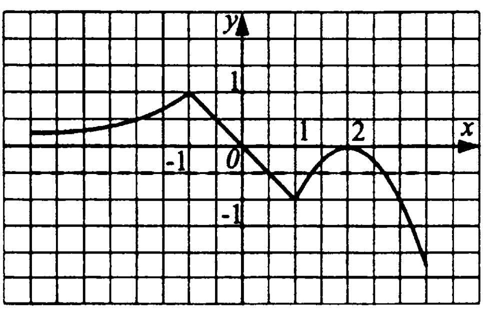


Рис. 227

Ответ: $(-1; 0)$.

584. Прямая $y = kx + 4$ не пересекает параболу $y = 3 - 2x - x^2$ тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $3 - 2x - x^2 = kx + 4$ отрицателен.
То есть $D = (k+2)^2 - 4 = k^2 + 4k + 4 - 4 = k^2 + 4k = k(k+4) < 0$.

Последнее неравенство имеет решение $-4 < k < 0$. Наибольшее целое значение из этого промежутка $k = -1$.

Ответ: -1.

585. Прямая $y = kx - 3$ имеет с параболой $y = x^2 - 2x + 1$ одну общую точку тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 - 2x + 1 = kx - 3$; $x^2 - (2+k)x + 4 = 0$ равен нулю.
То есть $D = (k+2)^2 - 4 \cdot 4 = k^2 + 4k - 12 = 0$. Корни: $k_1 = -6$; $k_2 = 2$.
При этих значениях k прямая $y = kx - 3$ и парабола $y = x^2 - 2x + 1$ имеют одну общую точку.

Ответ: $-6; 2$.

586. Прямая $y = kx - 2$ не пересекает параболу $y = x^2 - x - 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x - 1 = kx - 2$; $x^2 - (1+k)x + 1 = 0$ не имеет решений.
То есть $D = (k+1)^2 - 4 < 0$; $k^2 + 2k - 3 < 0$; $-3 < k < 1$.
Так как по условию $k \geqslant 0$, то получаем $0 \leqslant k < 1$.

Ответ: $0 \leqslant k < 1$.

587. Прямая $y = kx - \dfrac{41}{4}$ и парабола $y = x^2 + 3x - 4$ имеют не более одной точки пересечения тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения $x^2 + 3x - 4 = kx - \dfrac{41}{4}$; $x^2 + (3-k)x + 6{,}25$ меньше либо равен нулю. $D = (3-k)^2 - 25 = k^2 - 6k - 16 \leqslant 0$.

Решениями этого неравенства будут $-2 \leqslant k \leqslant 8$. Но так как k — число отрицательное, то $-2 \leqslant k < 0$.

Ответ: $-2 \leqslant k < 0$.

588. Прямая $y = kx + 5$ имеет с параболой $y = x^2 - 4x + 14$ единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 4x + 14 = kx + 5$ имеет один корень.
То есть $D = (k+4)^2 - 4 \cdot 9 = k^2 + 8k - 20 = 0$. Корни: $k_1 = -10$, $k_2 = 2$.
Но так как по условию k — число отрицательное, то $k = -10$.

Ответ: -10.

589. Прямая $y = kx - 1$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x + 3$ единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 2x + 3 = kx - 1$; $x^2 + (2-k) + 4 = 0$ имеет один корень.

То есть $D = (2-k)^2 - 4\cdot 4 = k^2 - 4k - 12 = 0$. Решая полученное уравнение, найдём $k_1 = 6$, $k_2 = -2$. Но так как по условию $k < 0$, то выбираем ответ $k = -2$.

Ответ: -2.

590. Прямая $y = kx - 13$ пересекает параболу $y = x^2 + 3x - 4$ в двух точках тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 3x - 4 = kx - 13$; $x^2 + (3-k)x + 9 = 0$ имеет два различных решения.
То есть $D = (3-k)^2 - 4\cdot 9 = k^2 - 6k - 27 > 0$. Это неравенство имеет решения: $k < -3$ или $k > 9$. Так как по условию $k > 0$, то получаем ответ $k > 9$.

Ответ: $k > 9$.

591. Графики функций $y = kx - 5$ и $y = x^2 - 2x - 1$ пересекаются в двух точках тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 2x - 1 = kx - 5$; $x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ имеет два различных корня.
То есть $D = (k+2)^2 - 16 > 0$; $k^2 + 4k - 12 > 0$; $(k+6)(k-2) > 0$; $k \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$. Так как по условию $k > 0$, то искомые значения $k \in (2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

592. Графики функций $y = kx - 8$ и $y = x^2 + 5x + 1$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда уравнение $kx - 8 = x^2 + 5x + 1$; $x^2 + (5-k)x + 9 = 0$ не имеет действительных корней.
То есть $D = (5-k)^2 - 36 = k^2 - 10k - 11 = (k+1)(k-11) < 0$. Решением последнего неравенства является интервал $-1 < k < 11$. Так как $k > 0$, то $0 < k < 11$.

Ответ: $0 < k < 11$.

593. Графики функций $y = kx - 11$ и $y = x^2 + 6x + 25$ не имеют общих точек тогда и только тогда, когда уравнение $kx - 11 = x^2 + 6x + 25$; $x^2 + (6-k)x + 36 = 0$ не имеет действительных корней.
То есть $D = (6-k)^2 - 144 = k^2 - 12k - 108 = (k+6)(k-18) < 0$.

Решением последнего неравенства является интервал $-6 < k < 18$. Так как $k > 0$, то $0 < k < 18$.

Ответ: $0 < k < 18$.

594. $\begin{cases} 8 - 6x > 4x - 12, \\ 3x + 16 < 5x + 4a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x < 20, \\ 2x > 16 - 4a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 8 - 2a. \end{cases}$

Отметим на числовых осях области, на которых выполняется каждое из неравенств (см. рис. 228).

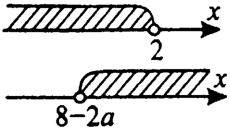


Рис. 228

Так как по условию задачи система имеет только одно целое решение, то $x = 1$, следовательно, $0 \leqslant 8 - 2a < 1$; $-8 \leqslant -2a < -7$; $4 \geqslant a > \frac{7}{2}$; $3{,}5 < a \leqslant 4$.

Ответ: $3{,}5 < a \leqslant 4$.

595. $\begin{cases} 12 + 7x < 9x - 6, \\ x - 9 < 6a - 2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 < 2x, \\ 3x < 6a + 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9, \\ x < 2a + 3. \end{cases}$

Так как по условию задачи система имеет ровно два целых решения, то $11 < 2a + 3 \leqslant 12$ (см. рис. 229).

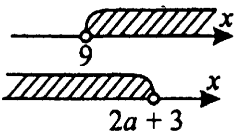


Рис. 229

Из этого неравенства получим $8 < 2a \leqslant 9$; $4 < a \leqslant \frac{9}{2}$; $4 < a \leqslant 4{,}5$.

Ответ: $4 < a \leqslant 4{,}5$.

596. Заданная парабола имеет с осью Ox не менее одной общей точки тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения $x^2 + 3x - 2c = 0$ неотрицателен. Учитывая, что $c < 0$, получим систему неравенств

$$\begin{cases} 9 + 8c \geqslant 0, \\ c < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geqslant -\frac{9}{8}, \\ c < 0. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{9}{8} \leqslant c < 0$.

597. Для того чтобы парабола $y = px^2 - 4x + 3 = 0$ не имела с осью Ox ни одной общей точки, дискриминант уравнения $px^2 - 4x + 3 = 0$ должен быть меньше нуля.

$D = 16 - 12p < 0$; $p > \frac{4}{3}$.

Ответ: $p > \frac{4}{3}$.

598. Графики функций $y = px^2 - 24x + 1$ и $y = 12x^2 - 2px - 1$ пересекаются в двух точках, если уравнение $px^2 - 24x + 1 = 12x^2 - 2px - 1$ имеет два различных действительных корня. Выполнив преобразования, получаем $(12 - p)x^2 - 2(p - 12)x - 2 = 0$. Уравнение $ax^2 + 2mx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $\begin{cases} a \neq 0; \\ \frac{D}{4} > 0. \end{cases}$

В данном случае имеем

$$\begin{cases} 12 - p \neq 0, \\ (p-12)^2 + 2(12-p) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 12, \\ (p-12)(p-14) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p < 12, \\ p > 14. \end{array} \right.$$

Ответ: $p \in (-\infty; 12) \cup (14; +\infty)$.

599. Прямая $y = kx + 10$ и парабола $y = -x^2 - 3x + 6$ не имеют общих точек, если уравнение $kx + 10 = -x^2 - 3x + 6$ не имеет действительных корней, то есть $D < 0$. Получим $x^2 + (3+k)x + 4 = 0$; $D = (3+k)^2 - 16 < 0$; $9 + 6k + k^2 - 16 < 0$; $k^2 + 6k - 7 < 0$; $(k-1)(k+7) < 0$; $-7 < k < 1$. По условию $k < 0$, следовательно, $-7 < k < 0$.

Ответ: $-7 < k < 0$.

600. Если уравнение $ax^2 - 4x + 2 = 0$ имеет два различных корня, то $a \neq 0$ и дискриминант $D > 0$. По теореме Виета произведение корней x_1x_2 приведённого квадратного уравнения есть его свободный член. Обозначим корни уравнения $x^2 - \frac{4}{a}x + \frac{2}{a} = 0$ через x_1 и x_2. Тогда $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{a}$, и так как корни имеют разные знаки, то $\frac{2}{a} < 0$, $a < 0$. В этом случае

$D = \frac{16}{a^2} - \frac{8}{a} > 0$.

Наибольшее целое значение a, удовлетворяющее неравенству $a < 0$, есть $a = -1$.

Ответ: -1.

601. По условию абсцисса вершины данной параболы $x_0 = -\frac{b}{2} = -4$. Отсюда $b = 8$. Итак, уравнение параболы $y = x^2 + 8x + c$. Так как вершина параболы находится в точке $K(-4; 7)$, то $7 = (-4)^2 + 8(-4) + c$; $7 = 16 - 32 + c$. Отсюда $c = 23$.

Ответ: $b = 8$; $c = 23$.

602. Данная прямая пересекает заданную окружность, если имеет решения система уравнений $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 2, \\ y = kx + 2. \end{cases}$

Подставив значение y из второго уравнения системы в первое, получим $x^2 + (kx-2)^2 = 2$; $(k^2+1)x^2 - 4kx + 2 = 0$. Для того чтобы прямая пересекла окружность в двух точках, дискриминант последнего уравнения должен быть больше нуля: $D = 16k^2 - 8k^2 - 8 > 0$; $k^2 > 1$; $|k| > 1$. Так как k — число отрицательное, то $k < -1$.

Ответ: $k < -1$.

603. Данная прямая пересекает заданную окружность, если имеет решения система уравнений $\begin{cases} y = x + k + 1, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2. \end{cases}$

Подставив значение y из первого уравнения системы во второе, получим $(x+1)^2 + (x+k+1-1)^2 = 2$; $2x^2 + 2(1+k)x - 1 + k^2 = 0$.

Прямая пересечёт окружность в двух точках, если дискриминант полученного уравнения будет больше нуля: $\dfrac{D}{4} = (1+k)^2 + 2 - 2k^2 > 0$; $k^2 - 2k - 3 < 0$; $-1 < k < 3$. Нам нужны неположительные значения k, значит, $-1 < k \leqslant 0$.

Ответ: $-1 < k \leqslant 0$.

604. Данные прямая и парабола не имеют общих точек, если уравнение $3x^2 - 2ax + 4 = a - 2$ не имеет решений. В этом случае дискриминант квадратного уравнения $3x^2 - 2ax + 6 - a = 0$ должен быть меньше нуля. $\dfrac{D}{4} = a^2 - 18 + 3a$; $a^2 + 3a - 18 < 0$; $-6 < a < 3$.

Ответ: $-6 < a < 3$.

605. Данные прямая и парабола не имеют общих точек, если уравнение $2x^2 + 2kx + 6 = -k - 6$ не имеет решений. В этом случае дискриминант квадратного уравнения $2x^2 + 2kx + 12 + k = 0$ должен быть меньше нуля. $\dfrac{D}{4} = k^2 - 24 - 2k$; $k^2 - 2k - 24 < 0$; $-4 < k < 6$.

Ответ: $-4 < k < 6$.

606. Прямая $y = kx - 2$ не имеет общих точек с параболой $y = x^2 + 3x - 1$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + 3x - 1 = kx - 2$; $x^2 + (3-k)x + 1 = 0$ не имеет корней, то есть $D = (3-k)^2 - 4 < 0$.

21. Зак. № 71

Прямая не имеет общих точек с параболой $y = x^2 - x + 2$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - x + 2 = kx - 2$; $x^2 - (1 + k)x + 4 = 0$ не имеет корней, то есть $D = (1 + k)^2 - 16 < 0$. Следовательно, данная прямая не имеет общих точек с обеими параболами, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (3-k)^2 - 4 < 0, \\ (1+k)^2 - 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 6k + 5 < 0, \\ k^2 + 2k - 15 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < k < 5, \\ -5 < k < 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 < k < 3.$$

Ответ: $1 < k < 3$.

607. Прямая $y = kx + 5$ не имеет общих точек с параболами, если уравнения $kx + 5 = -2x^2 - 2x + 3$ и $kx + 5 = x^2 + 5x + 21$ не имеют решений. В этом случае их дискриминанты отрицательны:

$$\begin{cases} (k+2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0, \\ (5-k)^2 - 4 \cdot 16 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 4k - 12 < 0, \\ k^2 - 10k - 39 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < k < 2, \\ -3 < k < 13; \end{cases} \Leftrightarrow -3 < k < 2.$$

Ответ: $-3 < k < 2$.

608. Построим график данной функции (см. рис. 230).

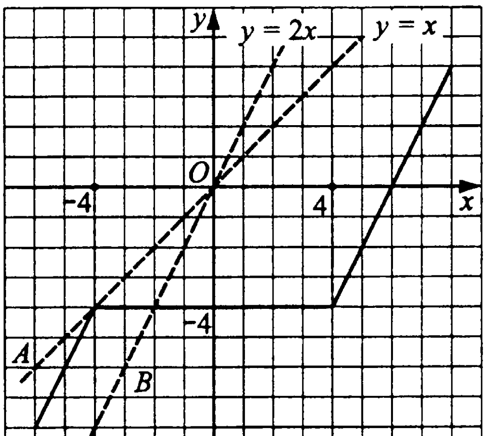


Рис. 230

Проведём прямую OA, проходящую через начало координат и точку с координатами $(-4; -4)$, и прямую OB, проходящую через начало координат и параллельную прямым $y = 2x + 4$ и $y = 2x - 12$. Прямая $y = ax$

имеет три общие точки с графиком данной функции тогда и только тогда, когда она лежит внутри угла AOB, следовательно, $1 < a < 2$.

Ответ: $1 < a < 2$.

609. Рассмотрим функцию $y(x) = 2x^2+2(a+2)x+a+6$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Значения параметра a, при которых все решения неравенства $y(x) < 0$ являются положительными числами, можно найти из условий

$$\left[\begin{array}{l} D < 0, \\ \begin{cases} D \geqslant 0, \\ y(0) \geqslant 0, \\ x_0 \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

где D — дискриминант уравнения $y(x) = 0$, x_0 — абсцисса вершины параболы $y(x)$.

Решаем полученную совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 4a^2+8a-32 < 0, \\ \begin{cases} 4a^2+8a-32 \geqslant 0, \\ a+6 \geqslant 0, \\ -\dfrac{2(a+2)}{4} \geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < a < 2, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \leqslant -4, \\ a \geqslant 2, \end{array}\right. \\ a \geqslant -6, \\ a \leqslant -2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < a < 2, \\ -6 \leqslant a \leqslant -4; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -6 \leqslant a < 2$.

Ответ: $-6 \leqslant a < 2$.

Замечание. При $D < 0$ неравенство $y(x) < 0$ не имеет решений. Это означает, что множество решений неравенства не содержит неположительных чисел, то есть выполняется условие задачи.

610. Рассмотрим функцию $y(x) = 2x^2+2(a-2)x+6-a$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Значения параметра a, при которых все решения неравенства $y(x) < 0$ являются отрицательными числами, можно найти из условий $\left[\begin{array}{l} D < 0, \\ \begin{cases} D \geqslant 0, \\ y(0) \geqslant 0, \\ x_0 \leqslant 0, \end{cases} \end{array}\right.$

где D — дискриминант уравнения $y(x) = 0$, x_0 — абсцисса вершины параболы $y(x)$. Решаем полученную совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 4a^2-8a-32<0, \\ \begin{cases} 4a^2-8a-32\geqslant 0, \\ 6-a\geqslant 0, \\ -\dfrac{2(a-2)}{4}\leqslant 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<a<4, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\geqslant 4, \\ a\leqslant -2, \end{array}\right. \\ a\leqslant 6, \\ a\geqslant 2; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<a<4, \\ 4\leqslant a\leqslant 6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow -2 < a \leqslant 6.$

Ответ: $-2 < a \leqslant 6$.

Замечание. При $D < 0$ неравенство $y(x) < 0$ не имеет решений. Это означает, что множество решений неравенства не содержит неотрицательных чисел, то есть выполняется условие задачи.

611. Указанное неравенство не имеет решений, если дискриминант D квадратного уравнения $x^2-(6a+2)x+9a+3=0$ меньше нуля. Вычислим $D=(6a+2)^2-4\cdot(9a+3)=36a^2-12a-8=4(9a^2-3a-2)$ и решим неравенство $9a^2-3a-2<0$. Для этого решим уравнение $9a^2-3a-2=0$. Корни его $a_1=-\frac{1}{3}$; $a_2=\frac{2}{3}$, а решение неравенства $-\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}<a<\frac{2}{3}$.

612. Данное неравенство эквивалентно неравенству $x^2+(4a-3)x+1{,}75-3a\leqslant 0$. Это неравенство не имеет решений, когда дискриминант D соответствующего квадратного уравнения меньше нуля. Вычислим $D=(4a-3)^2-4(1{,}75-3a)=16a^2-12a+2=2(8a^2-6a+1)$. Решим неравенство $8a^2-6a+1<0$. Для этого решим уравнение $8a^2-6a+1=0$. Его корни $a_1=\frac{1}{4}$ и $a_2=\frac{1}{2}$, а решение неравенства есть $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$.

613. Неравенство $ax^2+(a-3)x+a>0$ выполняется при любых x, если $a>0$ и дискриминант уравнения $ax^2+(a-3)x+a=0$ $D=(a-3)^2-4a\cdot a<0$. Получаем

$$\begin{cases} a^2-6a+9-4a^2<0, \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a-3>0, \\ a>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} (a-1)(a+3)>0, \\ a>0. \end{cases}$$

Решая методом интервалов последнюю систему (см. рис. 231), получим $a>1$.

Ответ: $a>1$.

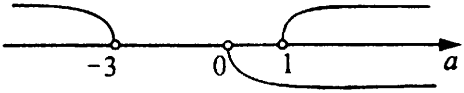


Рис. 231

614. Неравенство $ax^2 + (a-6)x + a \geqslant 0$ не имеет решений при отрицательных a, если дискриминант уравнения $ax^2 + (a-6)x + a = 0$ $D = (a-6)^2 - 4a \cdot a < 0$. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 12a + 36 - 4a^2 < 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4a - 12 > 0, \\ a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(a+6) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Решая методом интервалов (см. рис. 232), получим $a < -6$.

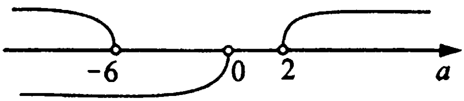


Рис. 232

Ответ: $a < -6$.

615. Построим график функции $y = \big||4x-5| - 1\big|$ (см. рис. 233).

Прямая $y = kx+4$ проходит через точку $(0; 4)$ при любом значении параметра k. При $k = -4$ прямая $y = kx + 4$ имеет бесконечное множество общих точек с графиком данной функции. При $k \neq -4$ для выполнения условия задачи необходимо, чтобы прямая $y = kx + 4$ лежала «не выше» точки $\left(\frac{5}{4}; 1\right)$ и «не ниже» точки $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Запишем уравнения прямых, проходящих через точки $(0; 4)$, $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ и $(0; 4)$, $\left(\frac{5}{4}; 1\right)$:

$$1) \begin{cases} 4 = 0 \cdot k + b, \\ 0 = \frac{3}{2}k + b; \end{cases} \quad k = -\frac{8}{3}, b = 4; y = -\frac{8}{3}x + 4;$$

$$2) \begin{cases} 4 = 0 \cdot k + b, \\ 1 = \frac{5}{4}k + b; \end{cases} \quad k = -\frac{12}{5}, b = 4; y = -\frac{12}{5}x + 4.$$

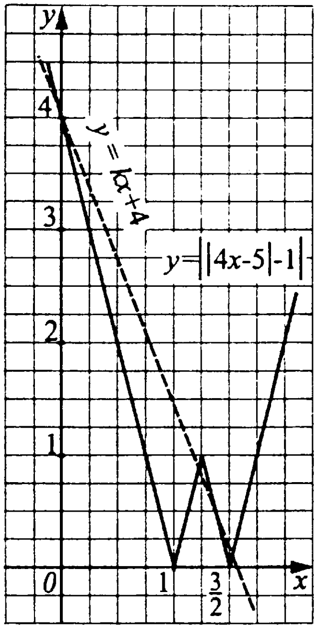


Рис. 233

Из вышесказанного следует, что условие задачи выполняется при $-\frac{12}{5} \leqslant k \leqslant -\frac{8}{3}$ и $k = -4$.

Ответ: $k = -4,\ -\frac{12}{5} \leqslant k \leqslant -\frac{8}{3}$.

616. Построим график функции $y = \big||3x-2|-4\big|$ (см. рис. 234).

Прямая $y = kx + 2$ проходит через точку $(0; 2)$ при любом значении параметра k. При $k = 3$ прямая $y = kx + 2$ имеет бесконечное множество общих точек с графиком данной функции. При $k > 3$ $y = kx + 2$ имеет единственную общую точку с графиком данной функции, значит, $k \leqslant 3$. При $k = -1$ $y = kx+2$ имеет три общие точки с графиком данной функции, а при $k < -1$ графики функций $y = kx + 2$ и $y = \big||3x-2|-4\big|$ имеют менее трёх общих точек, значит, $k \geqslant -1$. При $-1 \leqslant k \leqslant 3$ условие задачи выполняется.

Ответ: $-1 \leqslant k \leqslant 3$.

617. Будем решать эту задачу графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = kx$ и $y = y(x)$, имея в виду, что прямая $y = kx$ проходит через начало координат, а параметр k есть

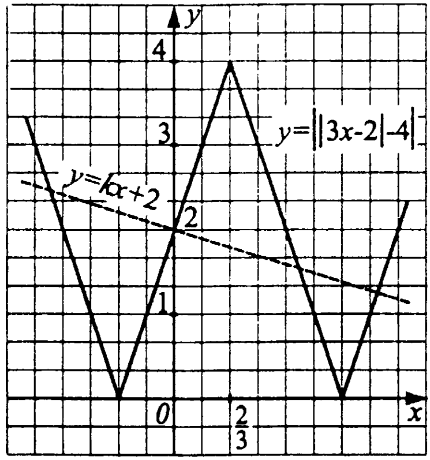


Рис. 234

угловой коэффициент этой прямой. При различных значениях k прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, принимает разные положения (см. рис. 235).

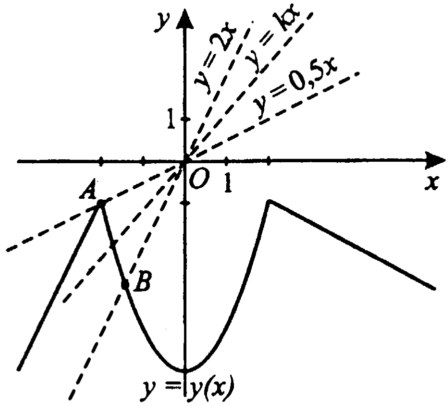


Рис. 235

Прямая $y = kx$ и кривая $y = y(x)$ пересекаются в двух различных точках тогда и только тогда, когда прямая $y = kx$ будет проходить внутри угла AOB, где прямая OB задана уравнением $y = 2x$, а прямая OA — уравнением $y = 0{,}5x$.

При любом другом k прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = y(x)$ либо не более, чем в одной точке, либо в бесконечном числе точек при $k = -0{,}5$.

Таким образом, $0{,}5 < k < 2$.

Ответ: $0{,}5 < k < 2$.

618. Построим график данной функции

$$y = \begin{cases} 3x + 5, \text{ если } x < -2, \\ -x + 2, \text{ если } -2 < x \leqslant 2, \\ x - 2, \quad \text{если } x > 2 \end{cases}$$

(см. рис. 236).

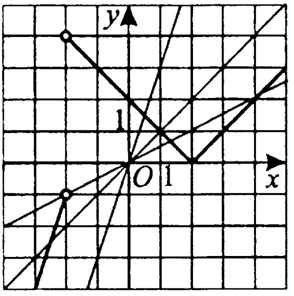


Рис. 236

Прямая $y = kx$ пересекает график функции в двух различных точках, если:

1) угловой коэффициент прямой больше углового коэффициента прямой $y = 0$ и меньше либо равен угловому коэффициенту прямой, проходящей через точку с координатами $(-2; -1)$;

2) угловой коэффициент прямой больше либо равен угловому коэффициенту прямой, параллельной прямой $y = x - 2$, и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямой $y = 3x + 5$.

1. Найдём угловой коэффициент прямой, проходящей через точку с координатами $(-2; -1)$: $-1 = -2k$, $k = 0{,}5$.

Угловой коэффициент прямой $y = 0$ равен 0. Получаем $0 < k \leqslant 0{,}5$.

2. Угловой коэффициент прямой, параллельной прямой $y = x - 2$, равен 1, а прямой, параллельной прямой $y = 3x + 5$, равен 3. Получаем $1 \leqslant k < 3$. Прямая $y = kx$ имеет две общие точки с графиком заданной функции, если $0 < k \leqslant 0{,}5$ и $1 \leqslant k < 3$.

Ответ: $(0; 0{,}5] \cup [1; 3)$.

619. Будем решать эту задачу графически. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = kx$ и $y = \begin{cases} 3x + 3, \ x < 0, \\ x - 2, \ 0 \leqslant x < 1, \\ -2x + 1, \ x \geqslant 1. \end{cases}$

Для различных значений k прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, принимает разные положения.

Из рисунка 237 следует, что $k \in (-\infty; -2]$ или $k = -1$, так как для всех других k прямая $y = kx$ будет иметь с кривой или одну общую точку, или три общие точки, или не будет иметь ни одной.

Ответ: $k \in (-\infty; -2] \cup \{-1\}$.

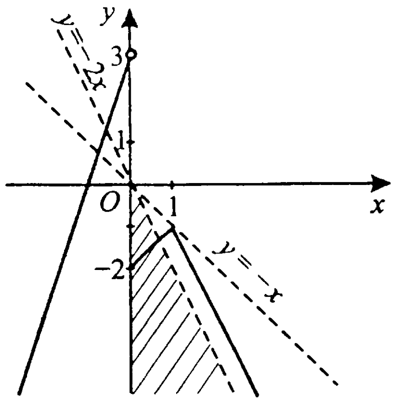


Рис. 237

620. Построим окружность с центром в точке $E(6; 4)$ радиусом 4 и проведём диаметры BF и AC, параллельные осям координат (см. рис. 238).

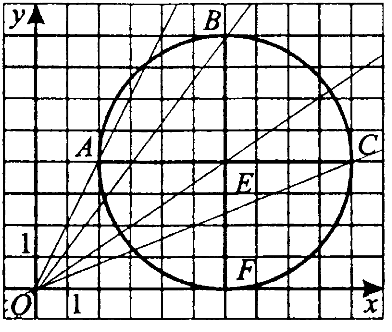


Рис. 238

По рисунку видно, что прямая $y = kx$ имеет ровно одну общую точку с диаметрами AC и BF в трёх случаях.

1. Угловой коэффициент прямой $y = kx$ больше либо равен угловому коэффициенту прямой $y = 0$ и меньше углового коэффициента прямой OC.

Найдём угловой коэффициент прямой OC как прямой, проходящей через точку $C(10; 4)$: $4 = 10k$, $k = \frac{2}{5}$.

Угловой коэффициент прямой $y = 0$ равен 0. Получаем: $0 \leqslant k < \frac{2}{5}$.

2. Условию задачи удовлетворяет прямая $y = kx$, проходящая через центр окружности точку $E(6;4)$. Найдём угловой коэффициент прямой OE: $4 = 6k$, $k = \frac{2}{3}$.

3. Угловой коэффициент прямой $y = kx$ больше углового коэффициента прямой OB, но меньше либо равен угловому коэффициенту прямой OA.

Найдём угловой коэффициент прямой OB как прямой, проходящей через точку $B(6;8)$: $8 = 6k$, $k = \frac{4}{3}$.

Найдём угловой коэффициент прямой OA как прямой, проходящей через точку $A(2;4)$: $4 = 2k$, $k = 2$.

Получаем $\frac{4}{3} < k \leqslant 2$.

Ответ: $0 \leqslant k < \frac{2}{5}$, $k = \frac{2}{3}$, $\frac{4}{3} < k \leqslant 2$.

621. Построим в одной системе координат данный прямоугольник (с его диагоналями) и прямую $y = kx$ (см. рис. 239).

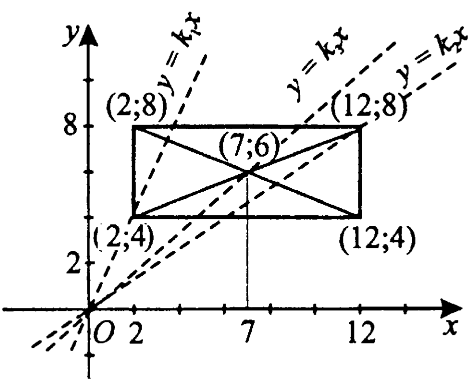


Рис. 239

Пусть $y = k_1x$ — прямая, проходящая через точки $(0;0)$ и $(2;4)$; $y = k_2x$ — прямая, проходящая через точки $(0;0)$ и $(12;8)$; $y = k_3x$ — прямая, проходящая через точки $(0;0)$ и $(7;6)$. Тогда прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с множеством точек, принадлежащих диагоналям этого прямоугольника, тогда и только тогда, когда $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$ и $k \neq k_3$. Легко видеть, что $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{2}{3}$, $k_3 = \frac{6}{7}$.

Ответ: $\frac{2}{3} \leqslant k < \frac{6}{7}$; $\frac{6}{7} < k \leqslant 2$.

622. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$.

$AB = CD$ как диаметры одной окружности; $\angle BDA = \angle CAD = 90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметры; $\angle ABD = \angle DCA$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AD.

Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$ по гипотенузе и острому углу.

623. Пусть $AC = a$, тогда $R = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot a}{4S} = \dfrac{6a}{4 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{2a}{\sqrt{15}}$; $R\sqrt{15} = 2a$ (см. рис. 240).

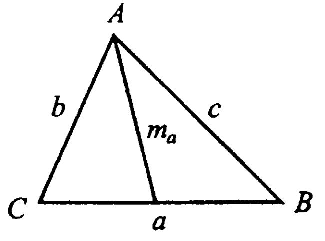


Рис. 240

По формуле Герона

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+2+3}{2} = \dfrac{5+a}{2}$ — полупериметр $\triangle ABC$, $b = 2$, $c = 3$ — стороны $\triangle ABC$.

Тогда $S = \sqrt{\dfrac{5+a}{2} \cdot \dfrac{5-a}{2} \cdot \dfrac{a+1}{2} \cdot \dfrac{a-1}{2}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(25-a^2)(a^2-1)}$;

$\dfrac{3\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(25-a^2)(a^2-1)}$; $9 \cdot 15 = -a^4 + 26a^2 - 25$; $a^4 - 26a^2 + 160 = 0$; $a_1 = 4$, $a_2 = \sqrt{10}$.

Учитывая формулу для вычисления медианы

$m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 - a^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{26 - a^2}$ и условие $m_a < \dfrac{a}{2}$, то есть $\sqrt{26 - a^2} < a$, получаем верное неравенство при $a = 4$ и неверное неравенство при $a = \sqrt{10}$.

Таким образом, $R\sqrt{15} = 2a = 8$.

Ответ: 8.

624. 1. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 36 = 864$. С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$, где $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60$. Тогда $CD = \frac{2S_{ABC}}{AB} = 28{,}8$ (см. рис. 241).

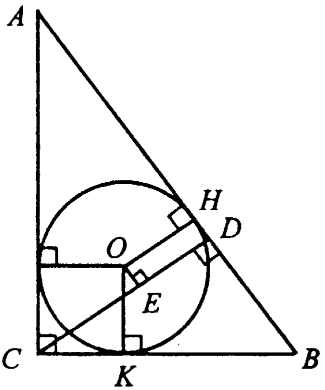


Рис. 241

2. $S_{ABC} = \frac{Pr}{2}$, $r = \frac{2S_{ABC}}{P}$, где $P = 36 + 48 + 60 = 144$ — периметр, $r = OH$ — радиус вписанной окружности $\triangle ABC$. Тогда $r = \frac{2 \cdot 864}{144} = 12$.

3. Так как $OEDH$ — прямоугольник, то $OE = HD = BH - BD$. Но $BD = \sqrt{CB^2 - CD^2} = \sqrt{36^2 - 28{,}8^2} = 21{,}6$; $BH = BK = CB - r = 36 - 12 = 24$. Следовательно, $OE = 24 - 21{,}6 = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

625. Треугольники ABC и CBH — прямоугольные, $\angle ACB = \angle CHB = 90°$, $\angle ABC = \angle CBH$. Следовательно, треугольники ABC и CBH подобны по первому признаку подобия треугольников.

626. Заметим, что $\angle AKC = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности. Тогда середина отрезка BC — точка D — является центром описанной окружности прямоугольного треугольника BKC (см. рис. 242).

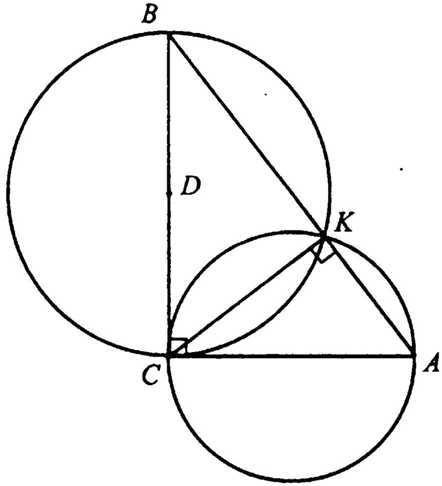


Рис. 242

Так как высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, то $CK = \sqrt{BK \cdot AK}$, то есть $BK = \dfrac{CK^2}{AK}$. При этом $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ и, значит, $BK = \dfrac{12^2}{5} = 28{,}8$.

Тогда $BC = \sqrt{BK^2 + CK^2} = \sqrt{28{,}8^2 + 12^2} = 31{,}2$; $BD = \dfrac{BC}{2} = 15{,}6$.

Ответ: 15,6.

627. Треугольники ABC и MNP подобны по третьему признаку подобия треугольников, так как стороны треугольника ABC пропорциональны сторонам треугольника MNP: $\dfrac{AB}{PN} = \dfrac{BC}{MP} = \dfrac{AC}{MN} = 2$ (MN, MP, PN — средние линии треугольника ABC).

628. Из формулы длины медианы $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ найдём сторону b.

$2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{15})^2 + 2 \cdot 1^2 - b^2}$, $16 = 30 + 2 - b^2$, $b^2 = 16$, $|b| = 4$. Так как $b > 0$, то $b = 4$.

Тогда периметр треугольника $p = 1 + \sqrt{15} + 4 = 5 + \sqrt{15}$. Следовательно, $(5 - \sqrt{15})p = (5 - \sqrt{15})(5 + \sqrt{15}) = 25 - 15 = 10$.

Ответ: 10.

629. 1) Точки M и N — середины сторон AB и BC, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$, $MN = \frac{1}{2}AC$, $AC = 6 \cdot 2 = 12$ (см. рис. 243).

$$AB = BC = \frac{P_{ABC} - AC}{2} = \frac{32 - 12}{2} = 10,$$

$$MB = NB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5,\ BK = 4.$$

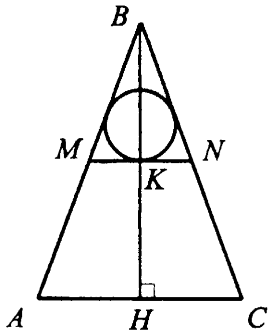


Рис. 243

2) $P_{MBN} = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16.$

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48,$

$$S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12.$$

$S_{MBN} = \frac{1}{2}rP_{MBN}$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle\ MBN$,

$$r = \frac{2S_{MBN}}{P_{MBN}} = \frac{2 \cdot 12}{16} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

630. Доказательство:

1) $\angle AOB = \angle COD$ как противолежащие (см. рис. 244).

2) $\angle ABC = \angle BCD$ как накрест лежащие.

3) $\triangle AOB = \triangle COD$ по второму признаку равенства треугольников ($OB = OC$, $\angle DOC = \angle BOA$, $\angle ABO = \angle OCD$).

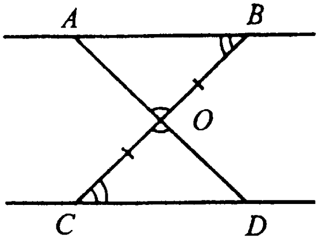


Рис. 244

631. Так как AD — медиана треугольника ABC, то $BD = CD = 2$ и $BC = 2CD = 4$ (см. рис. 245).

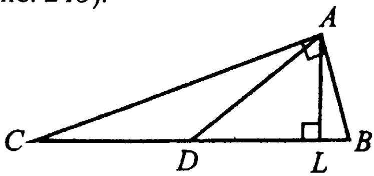


Рис. 245

Так как $AC^2 + AB^2 = BC^2$, то треугольник ABC — прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора. Следовательно, его площадь $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB = \frac{\sqrt{15}}{2}$. С другой стороны, $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AL$. Тогда $AL = \frac{2S}{BC} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Так как ABC — прямоугольный треугольник и AD — его медиана, то $AD = \frac{BC}{2} = 2$. Тогда $DL = \sqrt{AD^2 - AL^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \frac{7}{4}$.

Таким образом, $BL = BD - DL = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.

Ответ: 0,25.

632. Радиус вписанной окружности треугольника MBN $r = \frac{2S}{P}$, где S и P — площадь и периметр этого треугольника соответственно (см. рис. 246).

Так как $\cos\angle BAC = \frac{AD}{AB}$, то $AB = \frac{AD}{\cos\angle BAC} = \frac{AD}{\sqrt{1 - \sin^2\angle BAC}} =$

$= \frac{5}{3}AD = \frac{5}{3}MN = 10$. Значит, $P = 2MB + MN = AB + MN = 16$.

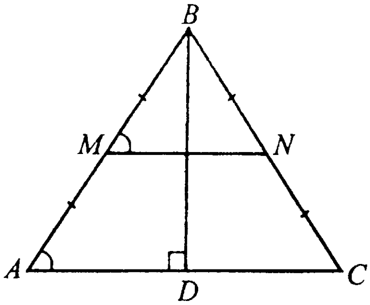


Рис. 246

Так как $MN \parallel AC$, то $\angle BAC = \angle BMN$. Тогда
$S = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot MN \cdot \sin \angle BMN = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 12.$

Таким образом, $r = \dfrac{2 \cdot 12}{16} = 1{,}5.$

Ответ: 1,5.

633. Доказательство:

$\triangle ABN = \triangle CBM$ по первому признаку равенства треугольников ($BN = BM$, $BC = BA$, $\angle B$ — общий), значит, $AN = CM$ (см. рис. 247).

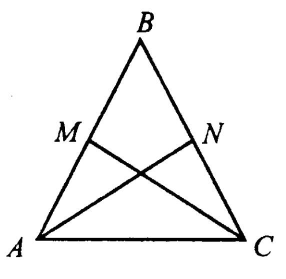


Рис. 247

634. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $AB = 2CD = 5$ (см. рис. 248). Тогда $AC = AB - 1 = 4$ и $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3$. Значит, $P_{ABC} = 3 + 4 + 5 = 12$.

Ответ: 12.

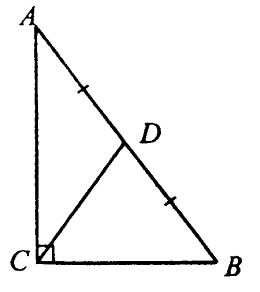


Рис. 248

635. Так как центр описанной окружности точка O является также серединой гипотенузы треугольника ABC и $\angle ADO$ — прямой, то OD — средняя линия этого треугольника (см. рис. 249).

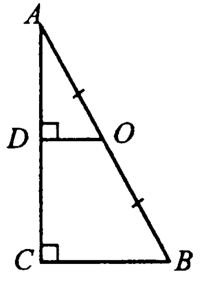


Рис. 249

Тогда $BC = 2OD = 2{\cdot}2{,}5 = 5$; $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$; $P_{ABC} = 13 + 12 + 5 = 30$. Итак, $r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot 30}{30} = 2$ — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: 2.

636. Так как $\cos\angle MNP = \frac{NK}{MN}$, то $NK = MN\cos\angle MNP = \frac{1}{4}$ (см. рис. 250). Тогда $MK = \sqrt{MN^2 - NK^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$;
$KP = \sqrt{MP^2 - MK^2} = \sqrt{15 - \frac{15}{16}} = \frac{15}{4}$; $NP = NK + KP = \frac{1}{4} + \frac{15}{4} = 4$.

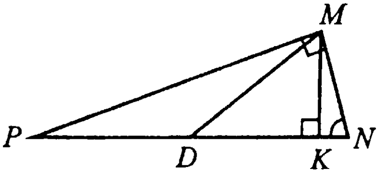


Рис. 250

Так как $MN^2 + MP^2 = NP^2$, то треугольник MNP — прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора. Следовательно, $MD = \dfrac{NP}{2} = 2$.

Ответ: 2.

637. Так как центр описанной окружности точка O является также серединой гипотенузы треугольника ABC и $\angle ADO$ — прямой, то OD — средняя линия этого треугольника (см. рис. 251). Значит, $BC = 2OD = 5$.

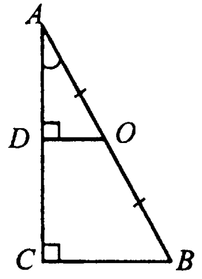


Рис. 251

Так как $\operatorname{tg} \angle BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5}{12}$, то $AC = \dfrac{12 \cdot 5}{5} = 12$.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

$P_{ABC} = AB + BC + AC = 13 + 5 + 12 = 30$.

Ответ: 30.

638. По условию $AB = 29$, $AC = 27$, $AD = 26$ (см. рис. 252). Используя формулу для нахождения медианы, получим

$AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$; $2 \cdot 26 = \sqrt{2 \cdot 29^2 + 2 \cdot 27^2 - BC^2}$;

$BC = 2\sqrt{109}$.

По теореме косинусов для треугольника ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$; $436 = 29^2 + 27^2 - 2 \cdot 29 \cdot 27 \cdot \cos A$;

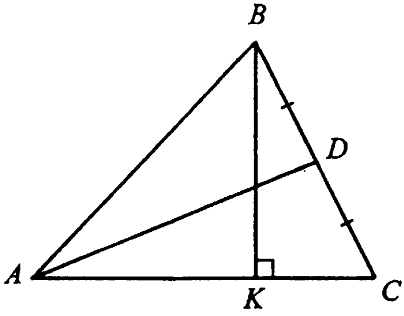


Рис. 252

$\cos A = \dfrac{21}{29}$. Отсюда $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \dfrac{20}{29}$. Так как $\sin A = \dfrac{BK}{AB}$, то $BK = AB\sin A = 29 \cdot \dfrac{20}{29} = 20$.

Ответ: 20.

639. Пусть $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{13}$, $BD = AC = x$, $AD = y$ (см. рис. 253).

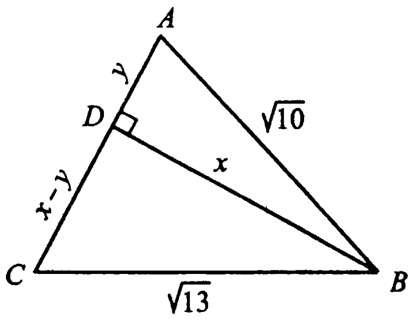


Рис. 253

Используя теорему Пифагора для треугольников ABD и BDC, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (x-y)^2 = 13, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 3$, $y = 1$, удовлетворяющее условиям $x > 0$, $y > 0$, $x > y$.

Ответ: 3.

640. Заметим, что $\triangle BMK \sim \triangle BAC$, так как $\angle B$ — общий, а $\frac{BM}{BA} = \frac{BK}{BC}$, значит, $\angle MKB = \angle ACB$ и прямые MK и AC параллельны.

641. Пусть $AB = BC = 4$, $AD = 3$, $AC = x$ (см. рис. 254). Тогда медиану треугольника можно найти по формуле $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$.

Отсюда $3 = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 4^2 + 2x^2 - 4^2}$; $x^2 = 10$.

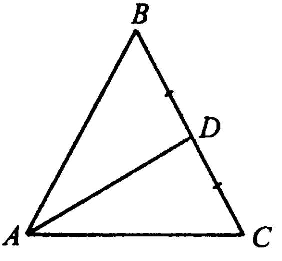


Рис. 254

Ответ: 10.

642. $\triangle MNK \sim \triangle ABC$, так как все его стороны пропорциональны сторонам треугольника ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$ как средние линии. Значит, все углы равны.

643. Пусть $AB = BC = x$, $BD = y$, $AD = 24$, $AC = 30$ (см. рис. 255).

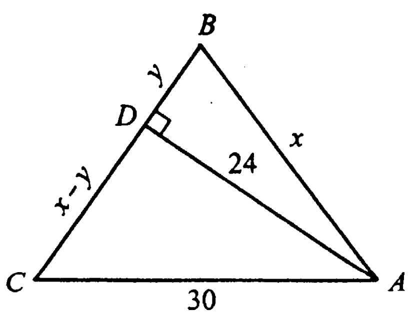


Рис. 255

Используя теорему Пифагора для треугольников ABD и ADC, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 24^2 + y^2 = x^2, \\ 24^2 + (x-y)^2 = 30^2. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 25$, $y = 7$, удовлетворяющее условиям $x > 0$, $y > 0$.

Ответ: 25.

644. Доказательство:

$\angle BCM = \angle ACM = 45°$ (см. рис. 256). $\triangle BMC$ — равнобедренный, поэтому возможны три варианта:

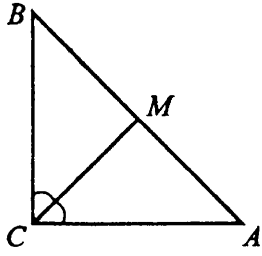


Рис. 256

1) $\angle BMC = \angle BCM = 45° \Rightarrow \angle B = 90°$, а это невозможно.

2) $\angle MBC = \angle BMC = \dfrac{180° - 45°}{2} = 67{,}5 \Rightarrow \angle AMC = 112{,}5° \Rightarrow$ $\angle MAC = 180° - 112{,}5° - 45° = 22{,}5°$, и $\triangle CMA$ не равнобедренный.

3) Значит, $\angle MBC = \angle BCM = 45° \Rightarrow \angle BMC = 90° \Rightarrow$ $\angle AMC = 90° \Rightarrow \angle MAC = 45°$. Таким образом, треугольник ABC — равнобедренный.

645. Пусть $AB = x$, $AC = y$ (см. рис. 257). Тогда из условия задачи следует совокупность систем уравнений:

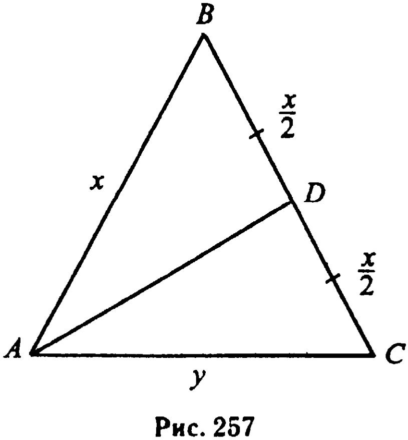


Рис. 257

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x+\dfrac{x}{2}=15,\\[2ex] y+\dfrac{x}{2}=6;\end{array}\right.\\[4ex] \left\{\begin{array}{l}x+\dfrac{x}{2}=6,\\[2ex] y+\dfrac{x}{2}=15.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10, y=1;\\ x=4, y=13.\end{array}\right.$$

Так как во втором случае не выполняется одно из неравенств треугольника $2x > y$, то $AB = 10$.

Ответ: 10.

646. По условию $ON = 5$, $MN = 6$ (см. рис. 258).

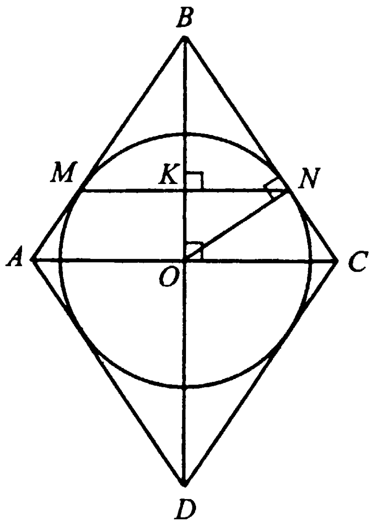


Рис. 258

$\Delta KNO \sim NBO$, так как они оба прямоугольные и $\angle NOK = \angle NOB$. Следовательно, $\dfrac{BN}{KN} = \dfrac{ON}{OK}$; $BN = \dfrac{KN \cdot ON}{OK} = \dfrac{3 \cdot 5}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \dfrac{15}{4}$.

$BK = \sqrt{BN^2 - KN^2} = \dfrac{9}{4}$.

$\triangle BKN \sim BOC$, так как они оба прямоугольные и $\angle OBC = \angle KBN$.

Следовательно, $\dfrac{BN}{BC} = \dfrac{BK}{BO}$; $BC = \dfrac{BN \cdot BO}{BK} = \dfrac{\frac{15}{4}\left(\frac{9}{4}+4\right)}{\frac{9}{4}} = \dfrac{125}{12}$.

Ответ: $\dfrac{125}{12}$.

647. Пусть $AB = KL = CD = x$, $AM = MB$ и $CN = ND$ (см. рис. 259). Тогда $\angle EAD = \angle BEA$ как накрест лежащие. Кроме того, AE — биссектриса $\angle BAD$. Следовательно, $\angle BAE = \angle BEA$, и $\triangle ABE$ — равнобедренный.

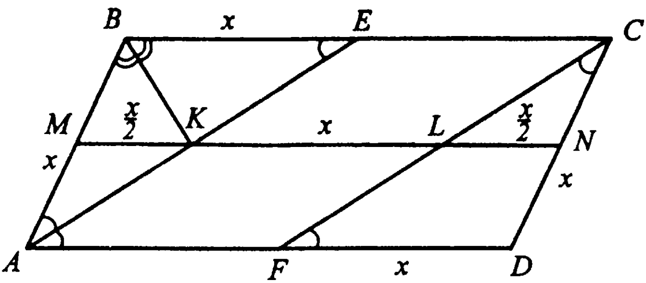


Рис. 259

Так как BK — биссектриса, проведённая к основанию равнобедренного треугольника ABE, то BK — медиана этого треугольника. Таким образом, MK — средняя линия $\triangle ABE$, то есть $MK = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}AB = \frac{x}{2}$ и $MK \parallel BC$. Аналогично доказывается то, что $LN = \frac{x}{2}$ и $LN \parallel AD$.

$AECF$ — параллелограмм, так как $AF \parallel EC$ и $AF = EC = BC - x$. Тогда $AKLF$ также параллелограмм, так как $AK \parallel FL$ и $AK = FL$. Следовательно, $KL \parallel AD$ и точки M, K, L и N лежат на одной прямой, причём $AD = MN = MK + KL + LN = \frac{x}{2} + x + \frac{x}{2} = 2x$. Таким образом, $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{2x}{x} = 2$.

Ответ: 2.

648. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $BO = OD$. Следовательно, $\triangle BCO = \triangle DOC$ по первому признаку равенства треугольников (OC —

общая, $BO = OD$, $\angle BOC = \angle DOC = 90°$). Значит, $BC = CD$ и, так как противоположные стороны параллелограмма попарно равны, то все стороны $ABCD$ равны, то есть $ABCD$ — ромб.

649. $\angle MAD = \angle AMB$ как накрест лежащие, и, так как $\angle BAM = \angle MAD$, то треугольник ABM — равнобедренный, то есть $BM = AB = 4$ (см. рис. 260).

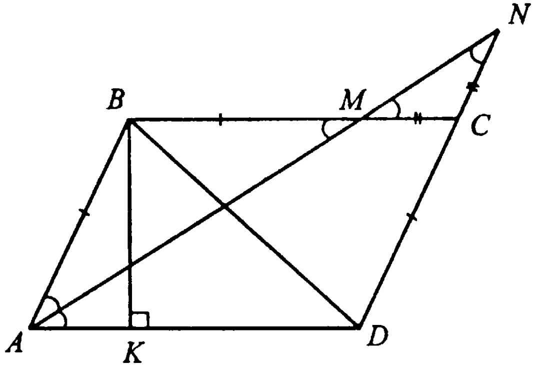


Рис. 260

$\angle NMC = \angle AMB$ как вертикальные, и $\angle BAM = \angle MNC$ как накрест лежащие. Следовательно, треугольник MCN — равнобедренный и $MC = CN = 2$. Значит, $AD = BC = BM + MC = 4 + 2 = 6$.

Так как треугольник ABK прямоугольный, то $BK = AB \cdot \sin \angle BAK = 4 \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3}$, $AK = \dfrac{AB}{2} = 2$ (катет, лежащий против угла в 30°).

Итак, $KD = AD - AK = 6 - 2 = 4$; $BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 2\sqrt{7}$.

Ответ: $2\sqrt{7}$.

650. 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как AK — биссектриса угла A (см. рис. 261). $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$. Значит, $\triangle ABK$ — равнобедренный, $BK = AB = 4$.

2) $\triangle ABK \sim \triangle ECK$ по первому признаку подобия ($\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, $\angle 5 = \angle 6$ как накрест лежащие при параллельных сторонах AB и CD и секущей BC).

Из подобия треугольников следует $\dfrac{AB}{EC} = \dfrac{BK}{KC}$.

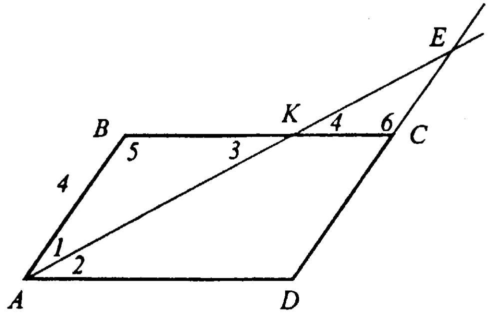


Рис. 261

Отсюда $KC = \dfrac{EC \cdot BK}{AB} = \dfrac{1 \cdot 4}{4} = 1.$

Ответ: 1.

651. Пусть $AB = 3$, $AC = \sqrt{37}$, $\angle BAK = 60°$ (см. рис. 262). Тогда $AK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{3}{2}$ как катет, лежащий против угла в 30°, и $BK =$
$= AB \cdot \cos A = 3 \cdot \cos 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

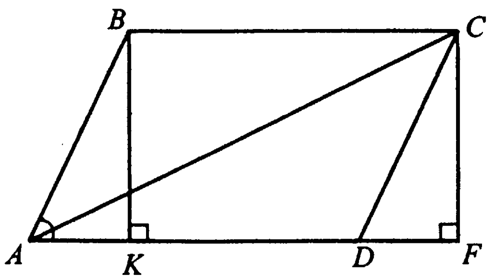


Рис. 262

Пусть $KD = x$. Так как $AK = DF$ ($\triangle ABK = \triangle DCF$ по второму признаку), то $AF = AK+KD+DF = x+3$. Тогда $AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} =$
$= \sqrt{AC^2 - BK^2} = \sqrt{37 - \dfrac{27}{2}} = \dfrac{11}{2}$; $x + 3 = \dfrac{11}{2}$; $x = \dfrac{5}{2}$. Следовательно,

$AD = AK + KD = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} = 4.$

Таким образом, $P_{ABCD} = 2AB + 2AD = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 14.$

Ответ: 14.

652. Доказательство:

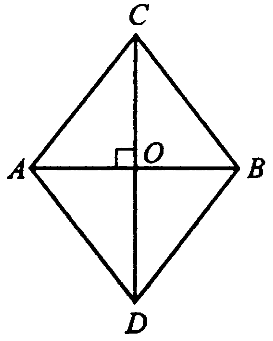


Рис. 263

Известно, что $AB \perp CD$, $AO = OB$, $CO = OD$ (см. рис. 263). $\triangle AOC = \triangle BOD$ по первому признаку равенства треугольников ($AO = OB$, $CO = OD$, $\angle COA = \angle BOD$). Аналогично $\triangle COB = \triangle AOD$.

$\triangle AOC = \triangle COB$ по первому признаку равенства треугольников ($\angle AOC = \angle COB$, OC — общая сторона, $AO = OB$).

Значит, $\triangle AOC = \triangle OCB = \triangle AOD = \triangle BOD$, а потому $AC = BC = AD = BD$, то есть $ABCD$ — ромб.

653. Пусть $AC = 3x$, $BD = 4x$ (см. рис. 264). По теореме Пифагора для треугольника AOB получим $AB^2 = AO^2 + BO^2$; $25 = \frac{9}{4}x^2 + 4x^2$; $x = 2$. Тогда $BD = 8$, $AC = 6$ и $BD + AC = 14$.

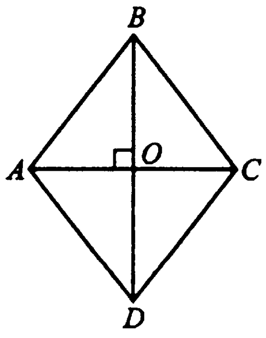


Рис. 264

Ответ: 14.

654. Доказательство:

$\triangle ABM = \triangle MCD$ по первому признаку равенства треугольников ($BM = MC, CD = AB, \angle ABM = \angle MCD$), значит, $AM = MD$.

655. По условию $3\angle CBD = \angle ABD$ (см. рис. 265). При этом $\angle ABC = 180° - \angle BAD = 120°$. Тогда $\angle ABC = 3\angle CBD + \angle CBD$; $120° = 4\angle CBD$; $\angle CBD = 30°$; $\angle ABD = 90°$.

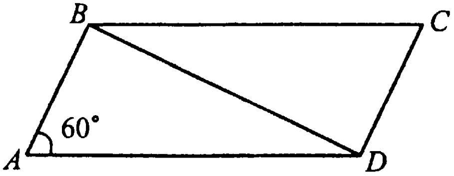


Рис. 265

Пусть $AD = x$. Тогда по условию $2x + 2AB = 90$; $AB = 45 - x$. Кроме того, треугольник ABD — прямоугольный и $\angle ADB = 30°$. Значит, $AB = \frac{1}{2}AD = \frac{x}{2}$ (катет, лежащий против угла в $30°$).

Итак, $\frac{x}{2} = 45 - x$; $x = 30$.

Ответ: 30.

656. Так как $\angle CBF = \angle BFA$ как накрест лежащие, то треугольник ABF — равнобедренный, то есть $AF = AB = 12$ (см. рис. 266).

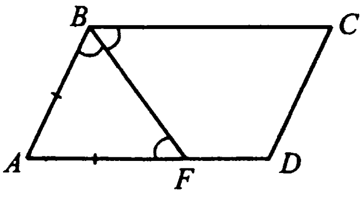


Рис. 266

Пусть $AF = 4x$, тогда $FD = 3x$. Так как $4x = 12$, то $x = 3$ и $AD = AF + FD = 7x = 21$. Следовательно, $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(12 + 21) = 66$.

Ответ: 66.

657. Так как MN — средняя линия $\triangle ABC$, то $MN \parallel AC$. Так как PL — средняя линия $\triangle ADC$, то $PL \parallel AC$. Следовательно, $MN \parallel PL$ (см. рис. 267). Аналогично $MP \parallel NL$. Значит, $MNLP$ — параллелограмм.

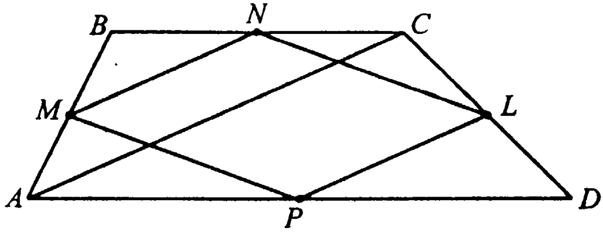


Рис. 267

658. Из равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, следуют равенства: $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$ (см. рис. 268). Отсюда $AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + BN + CN + DQ = AD + BC$.

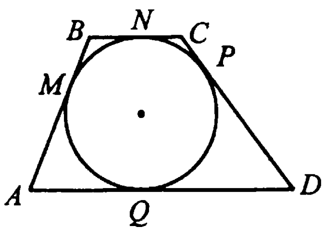


Рис. 268

659. Возможны два случая:

1) Центр описанной окружности находится внутри трапеции (см. рис. 269).

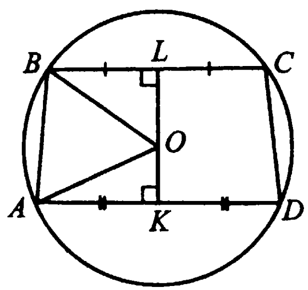


Рис. 269

Тогда $AO = \sqrt{AK^2 + OK^2} = \sqrt{\left(\frac{AD}{2}\right)^2 + OK^2} = \sqrt{16 + 9} =$

$= 5 = R$ — радиус описанной окружности; $LO = \sqrt{BO^2 - BL^2} =$

$= \sqrt{R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{25-9} = 4$. Высота трапеции $LK = LO + OK =$
$= 4 + 3 = 7$.

2) Центр описанной окружности находится вне трапеции (см. рис. 270).

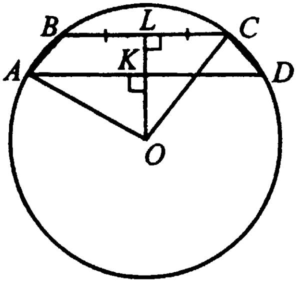


Рис. 270

Тогда $AO = \sqrt{AK^2 + OK^2} = \sqrt{\left(\frac{AD}{2}\right)^2 + OK^2} = \sqrt{16+9} =$
$= 5 = R$ — радиус описанной окружности; $LO = \sqrt{CO^2 - LC^2} =$
$= \sqrt{R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{25-9} = 4$. Высота трапеции $LK = LO - OK =$
$= 4 - 3 = 1$.

Ответ: 1; 7.

660. $\angle BCA = \angle BDA$ как опирающиеся на одну и ту же дугу (см. рис. 271). $\angle BCA = \angle CAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и

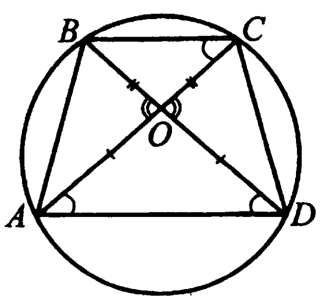


Рис. 271

AD и секущей AC. Значит, $\angle CAD = \angle BDA$, то есть $\triangle AOD$ — равнобедренный и $AO = OD$. Аналогично доказывается, что $BO = OC$. Так как, кроме того, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, то $\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $AB = CD$, то есть трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

661. Так как $BO = OD$, $\angle ADO = \angle OBK$ как накрест лежащие, $\angle AOD = \angle BOK$ как вертикальные, то $\triangle AOD = \triangle BOK$ (см. рис. 272). Тогда $CK = BK - BC = 10 - 5 = 5$.

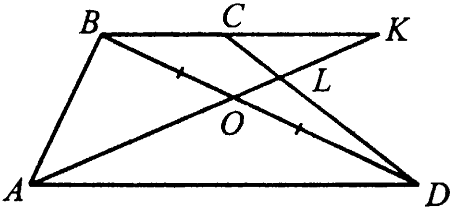


Рис. 272

$\triangle CLK \sim \triangle DLA$ ($\angle ALD = \angle CLK$ как вертикальные и $\angle DCK = \angle CDA$ как накрест лежащие). При этом $\frac{CK}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $\frac{CL}{LD} = \frac{1}{2}$, $\frac{LD}{CD} = \frac{2}{3}$, $LD = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$.

Ответ: 6.

662. Так как трапеция равнобедренная, то вокруг неё можно описать окружность (см. рис. 273). Тогда $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, $\triangle AOD$ — равнобедренный ($\angle OAD = \angle ODA$, так как углы при основании равнобедренной трапеции равны и $\angle BAC = \angle BDC$), и так как он прямоугольный, то $\angle OAD = 45°$. Но треугольник AOK также прямоугольный с острым углом в 45°, следовательно, он равнобедренный, и $AK = OK$.

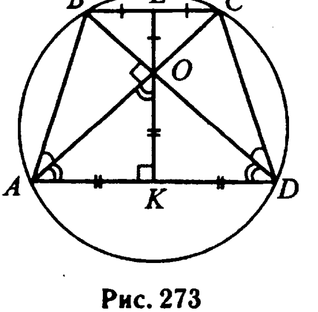


Рис. 273

Аналогично можно доказать, что $OL = BL$. Значит,

$KL = KO + OL = AK + BL = \frac{1}{2}(AD + BC) = MN = 4$, где MN — средняя линия трапеции.

Ответ: 4.

663. В треугольнике ABM: $BM = 2r = 2 \cdot 2 = 4$, где r — радиус вписанной окружности; $BM = \frac{1}{2}AB$, $AB = 8$ (см. рис. 274).

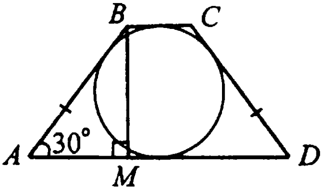


Рис. 274

Так как в $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD + BC =$ $= AB + CD = 8 + 8 = 16$. Тогда средняя линия трапеции равна $\frac{1}{2}(AD + BC) = 8$.

Ответ: 8.

664. Так как трапеция описана около окружности, то $AB+CD=BC+AD$ (см. рис. 275). Тогда $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 2(BC + AD) =$ $= 4MN = 4 \cdot 10 = 40$, где MN — средняя линия трапеции.

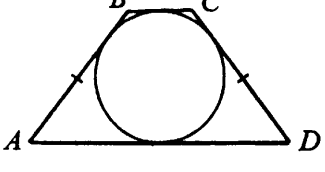


Рис. 275

Ответ: 40.

665. Так как трапеция описана около окружности, то $AB+CD=BC+AD$ (см. рис. 276). Средняя линия трапеции $MN = \frac{1}{2}(BC + AD) =$

$= \frac{1}{2}(AB + CD) = AB = 5.$

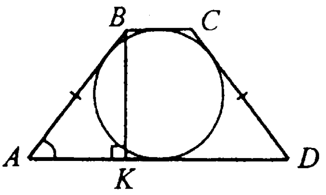


Рис. 276

Так как $\sin\angle BAK = \dfrac{BK}{AB}$, то $BK = AB\sin\angle BAK = 5\cdot\frac{4}{5} = 4$. Тогда $S_{ABCD} = MN\cdot BK = 5\cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

666. Так как трапеция равнобедренная, то вокруг неё можно описать окружность (см. рис. 277). Тогда $\angle BAC = \angle BDC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, $\triangle AOD$ — равнобедренный ($\angle OAD = \angle ODA$, так как углы при основании равнобедренной трапеции равны, и $\angle BAC = \angle BDC$) и, так как он прямоугольный, то $\angle OAD = 45°$. Но треугольник AOK также прямоугольный с острым углом в $45°$, следовательно, он равнобедренный и $AK = OK$.

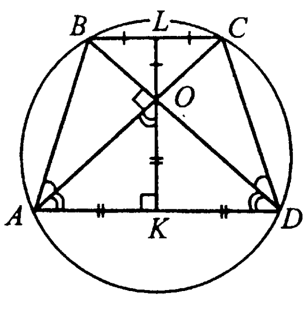


Рис. 277

Аналогично можно доказать, что $OL = BL$. Значит, $KL = KO + OL = AK + BL = \frac{1}{2}(AD + BC) = MN$, где MN — средняя линия трапеции.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot KL = MN\cdot KL = KL^2;\; KL^2 = 4;\; KL = 2.$$

Ответ: 2.

667. Пусть R, r и a — радиусы описанной и вписанной окружностей и сторона правильного шестиугольника соответственно (см. рис. 278). Тогда по теореме Пифагора $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2$. Так как в правильном шестиугольнике

$R = a$ и $r = R - 1$ по условию, то получим уравнение $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a-1)^2$;

$a = 4 \pm 2\sqrt{3}$. Так как из условия следует, что $r = a - 1 > 0$, то есть $a > 1$, то $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

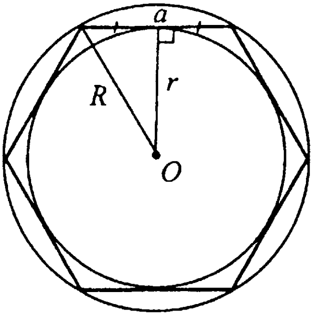


Рис. 278

Ответ: $4 + 2\sqrt{3}$.

668. $\angle AKB = \angle CKD$ как вертикальные, $\angle ABD = \angle ACD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ABK и CDK подобны по первому признаку подобия треугольников.

669. Треугольники AOB и OBC равны по третьему признаку равенства треугольников: $AO = CO$ как радиусы окружности; BO — общая сторона; $AB = CB$ как отрезки касательных, проведённых из одной точки.

670. Так как $CM = MD$, то $MD = \frac{1}{2}CD = 12$ (см. рис. 279). Из треугольника OMD получим $OM = \sqrt{OD^2 - MD^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$. Из треугольника O_1MD получим $O_1M = \sqrt{O_1D^2 - MD^2} = \sqrt{400 - 144} = 16$.

Тогда $OO_1 = OM + O_1M = 5 + 16 = 21$; $O_1F = O_1E - ON = 20 - 13 = 7$. Из треугольника O_1OF получим $OF = \sqrt{OO_1^2 - O_1F^2} = \sqrt{21^2 - 7^2} = 14\sqrt{2}$.

Ответ: $14\sqrt{2}$.

671. Точки M и N — середины хорд AB и AC, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$ (см. рис. 280).

$MN = \frac{1}{2}BC,\ BC = 2MN = 2 \cdot 5 = 10.$

Периметр $P_{ABC} = 17 + 9 + 10 = 36$,

полупериметр $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$.

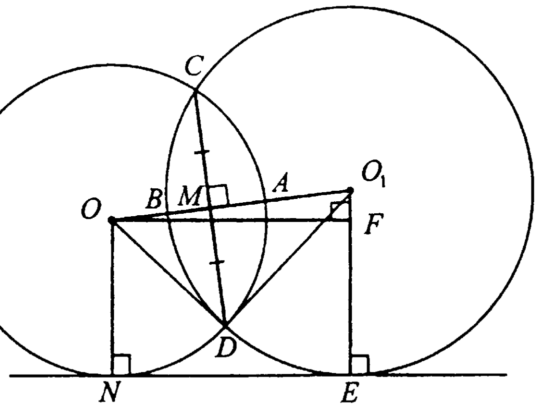


Рис. 279

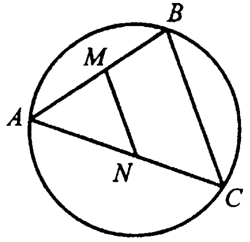


Рис. 280

Следовательно, $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$
$= \sqrt{18(18-10)(18-17)(18-9)} = 36$. Тогда радиус окружности $R = \dfrac{abc}{4S}$, а диаметр $2R = \dfrac{abc}{2S} = \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 17}{2 \cdot 36} = 21{,}25$.

Ответ: 21,25.

672. Так как $AOEB$ — прямоугольник, то $AB = OE$ (см. рис. 281).

По теореме Пифагора для треугольника OO_1E получим
$OE = \sqrt{OO_1^2 - O_1E^2} = \sqrt{OO_1^2 - (O_1B - EB)^2} =$
$= \sqrt{80 - (8-4)^2} = 8$.

Ответ: 8.

673. По теореме о касательной и секущей $AD \cdot AC = AB^2$,
$AD = \dfrac{AB^2}{AC} = 3$ (см. рис. 282).

Ответ: 3.

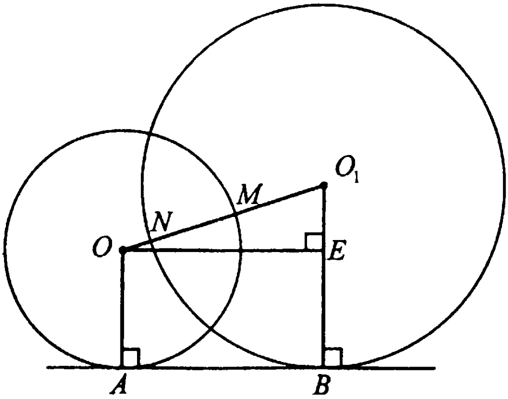


Рис. 281

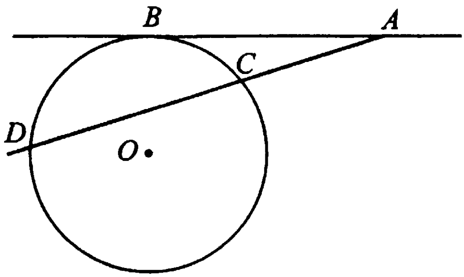


Рис. 282

674. По теореме о касательной и секущей $AN \cdot AM = AB^2$, $AN = \dfrac{AB^2}{AM} = 3$ (см. рис. 283). Тогда $MN = AN - AM = 3 - 1 = 2$; $OM = ON = 1$ — радиус окружности; $AO = AM + OM = 2$.

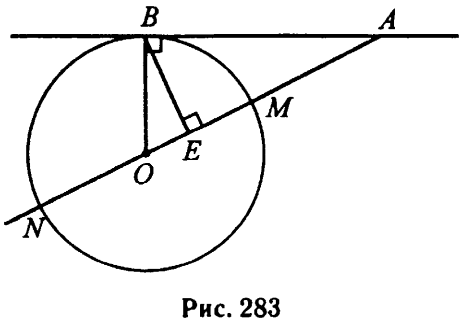


Рис. 283

$$S_{OBA} = \frac{1}{2}BO \cdot AB = \frac{1}{2}AO \cdot BE;\ BE = \frac{BO \cdot AB}{AO} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2};\ BE^2 = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 0,75.

675. $\triangle ACB \sim \triangle ADC$, так как они прямоугольные и имеют общий острый угол при вершине A (см. рис. 284). Тогда $\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{CD}$; $CB = AB \cdot \frac{CD}{AC}$ и $AB = 2 \cdot 17{,}5 = 35$.

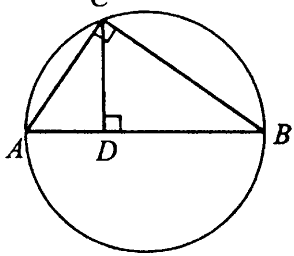


Рис. 284

Пусть $AC = 5x$, $AD = 3x$. Тогда по теореме Пифагора $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 4x$, то есть $\frac{CD}{AC} = \frac{4}{5}$.

Таким образом, $CB = 35 \cdot \frac{4}{5} = 28$ и $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$. Итак, $AC + CB = 21 + 28 = 49$.

Ответ: 49.

676. Так как $\angle ACD = 90°$, то AD — диаметр окружности (см. рис. 285). FE — средняя линия треугольника ACD. Следовательно, $AD = 2FE = 12$ и искомый радиус окружности равен 6.

Ответ: 6.

677. Так как по условию $BE = DF = 2$ и $EC = FC = 23$, то сторона квадрата $ABCD$ равна 25 (см. рис. 286).

Пусть r — радиус окружности. Тогда $OE = r$, $EL = BL - BE = OM - BE = r - 2$, $OL = NL - NO = 25 - r$. Так как EOL — прямоугольный треугольник, то по теореме Пифагора $EL^2 + OL^2 = OE^2$;

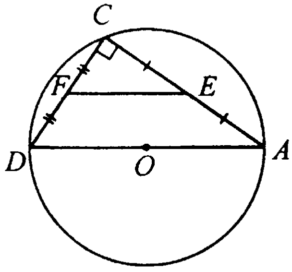


Рис. 285

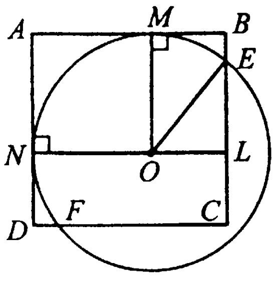


Рис. 286

$(r-2)^2 + (25-r)^2 = r^2$; $r^2 - 54r + 629 = 0$; $r = 37$ или $r = 17$, причём значение $r = 37$ не удовлетворяет условию $OL = 25 - r > 0$.

Ответ: 17.

ОГЭ

Учебное издание

Войта Елена Александровна, **Дрёмов** Виктор Александрович,
Иванов Сергей Олегович, **Ковалевская** Александра Сергеевна,
Коннова Елена Генриевна, **Кривенко** Виктор Михайлович,
Нужа Галина Леонтьевна, **Ольховая** Людмила Сергеевна,
Резникова Нина Михайловна, **Фридман** Елена Михайловна,
Ханин Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА.
РЕШЕНИЯ С МЕТОДИЧЕСКИМИ РЕКОМЕНДАЦИЯМИ.
9-й класс. ПОДГОТОВКА К ОГЭ-2016.
40 тренировочных вариантов

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 16.11.2015.
Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,39.
Тираж 10000 экз. Заказ № **71.**

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009 зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ООО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.